

2014年度 旭川医科大学（前期）

医学部

試験時間：120分

📖 全問必答

1 関数 $f(x) = \log(1+x^2)$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $\int_0^1 \log(1+x^2) dx$ を求めよ。
- (2) 導関数 $f'(x)$ の増減を調べ、 $y = f'(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (3) 曲線 $C: y = f(x)$ と曲線 C の互いに直交している 2 本の接線とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

2 $0 < a \leq \frac{\pi}{2}$ とし、曲線 $y = 1 - \cos x$ ($0 \leq x \leq a$) を C とする。 $0 < t < a$ とし、原点と C 上の点 $(t, 1 - \cos t)$ を通る直線を ℓ とおくと、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C と直線 ℓ とで囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ 、 $t \leq x \leq a$ の範囲で C と ℓ と直線 $x = a$ とで囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とおくと、 $S_1(t) + S_2(t)$ を求めよ。
- (2) $S_1(t) + S_2(t)$ を最小とする t の値を t_0 とするとき、 t_0 を a を用いて表せ。
- (3) $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{S_1(t_0) - S_2(t_0)}{a^3}$ を求めよ。
ただし、 $a - \frac{a^3}{3!} < \sin a < a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!}$ ($a > 0$) は用いてよい。

3 a を正の定数とする。 $AB = a$ 、 $AC = 2a$ 、 $\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$ である $\triangle ABC$ と、 $|2\vec{AP} - 2\vec{BP} - \vec{CP}| = a$ を満たす動点 P がある。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とするとき、 $|\vec{AD}|$ を求めよ。
- (2) $|\vec{AP}|$ の最大値を求めよ。
- (3) 線分 AP が通過してできる図形の面積 S を求めよ。

4 一列に並んだ3つの部屋 A, B, C があり, 2頭の象がいる。2頭の象は毎日1つの部屋から隣の部屋に, 次のルールに従って移動する。

$0 < p < 1$ とし, 象が部屋 A と部屋 B にいるとき, 部屋 A にいる象は部屋 A に留まり, 部屋 B にいる象が確率 p で部屋 C に移る。象が部屋 B と部屋 C にいるとき, 部屋 C にいる象は部屋 C に留まり, 部屋 B にいる象が確率 $1 - p$ で部屋 A に移る。象が部屋 A と部屋 C にいるとき, 部屋 A にいる象が確率 p で部屋 B に移り, 移らない場合は部屋 C にいる象が部屋 B に移る。2頭の象が同時に同じ部屋にいることはできない。

はじめに2頭の象はそれぞれ部屋 A と部屋 B にいるものとし, $2n$ 日後に象が部屋 A にいる確率を a_n ($n = 1, 2, \dots$) とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) a_1 を求めよ。
- (2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (3) $p = \frac{2}{3}$ のとき, a_n を求めよ。

2014年度 旭川医科大学（前期）

医学部

（略解）

☞ 証明，図示などは省略

1

(1) $\log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

(2) 図示は省略

(3) $S = \pi - 3$

2

(1) $2 \sin t - t - t \cos t - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1 - \cos t}{t} + a - \sin a$

(2) $t_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$

(3) $\frac{3\sqrt{2} - 4}{24}$

3

(1) $|\overrightarrow{AD}| = \frac{2}{3}a$

(2) 最大値 : $3a$

(3) $S = \left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)a^2$

4

(1) $a_1 = 1 - p^2$

(2) $a_{n+1} = (p - p^2)a_n + 1 - p$

(3) $a_n = \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n + \frac{3}{7}$