2013年度　旭川医科大学（前期）

医学部　　試験時間：120 分

全問必答

1　x，y，z，p は自然数で

$$xy+yz+zx=pxyz,\ x \leqq y \leqq z \cdots\cdots ①$$

を満たしている。次の問いに答えよ。

(1)　$p \leqq 3$ を示せ。

(2)　① を満たす自然数の組 $(p,\ x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ。

2　a を正の実数とする。双曲線 $C : x^2-a^2y^2+a^2=0$ 上の 4 点 $\mathrm{A}_1(0,\ 1)$，$\mathrm{A}_2(0,\ -1)$，$\mathrm{A}_3(a,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{A}_4(-2a,\ -\sqrt{5})$ が与えられている。A_1 における C の接線を ℓ_1，A_3 における C の接線を ℓ_3 とする。次の問いに答えよ。

(1)　ℓ_1 と ℓ_3 の交点 S の座標を求めよ。

(2)　直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と直線 $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ の交点 U の座標，および直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$ と直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の交点 V の座標を求めよ。

(3)　3 点 S，U，V が同一直線上にあることを示せ。

3　a を正の実数とし，$f(x)=e^{-x}\sin ax$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　n を自然数とする。曲線 $y=f(x)\left(\dfrac{2(n-1)\pi}{a} \leqq x \leqq \dfrac{2n\pi}{a}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を A_n で表すとき，A_n を a と n を用いて表せ。

(2)　$S=\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ を a を用いて表せ。

(3)　$\lim_{a\to\infty} S$ を求めよ。

4　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y = x\log x - x\ (x>0)$ の増減を調べ，そのグラフをかけ。

(2)　a を正の実数とする。曲線 $C : y = \log(x+1)$ 上の点 $(t,\ \log(t+1))$ における接線 ℓ_t が，曲線 C_a : $y = a\log x$ 上の点 $(s,\ a\log s)$ における接線にもなっているとき，t と s の関係を a を含まない式で表せ。

(3)　任意に与えられた $t>-1$ に対して，直線 ℓ_t が曲線 C_a の接線にもなっているような a が唯一つ存在すること，および $a>1$ であることを示せ。

(4)　直線 ℓ_t が曲線 C_a の接線になっているとき，その接点の x 座標を $s(t)$ とかくことにする。$s(t)$ を t の関数とみて増減を調べ，さらに $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(s(t)-t)$ を求めよ。

2013年度　旭川医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　証明は省略

（2）　$(p,\ x,\ y,\ z)=(3,\ 1,\ 1,\ 1)$，$(2,\ 1,\ 2,\ 2)$，$(1,\ 2,\ 3,\ 6)$，$(1,\ 2,\ 4,\ 4)$，$(1,\ 3,\ 3,\ 3)$

2

（1）　$\mathrm{S}((\sqrt{2}-1)a,\ 1)$

（2）　$\mathrm{U}\left(0,\ \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}\right)$，$\mathrm{V}((3+\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{5})a,\ 2\sqrt{2}+\sqrt{5})$

（3）　証明は省略

3

（1）　$A_n=\dfrac{ae^{-\frac{2n\pi}{a}}}{a^2+1}\left(1+e^{\frac{\pi}{a}}\right)^2$

（2）　$S=\dfrac{a\left(1+e^{\frac{\pi}{a}}\right)^2}{(a^2+1)\left(e^{\frac{2\pi}{a}}-1\right)}$

（3）　$\dfrac{2}{\pi}$

4

（1）　図示は省略

（2）　$(t+1)\log(t+1)-t=s\log s-s$

（3）　証明は省略

（4）　$-1<t<0$ で減少，$t>0$ で増加，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(s(t)-t)=1$