

2013年度 大阪市立大学（前期）

医学部
試験時間：120 分

全問必答

1 p, q は実数で、 $p \neq 0$ を満たすものとする。

$$A = \begin{pmatrix} p & p-1 \\ -p & 1-p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-p & 1-p \\ p & p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $A^2 = A, B^2 = B$ が成り立つことを示せ。
- (2) $AC = CA$ であるための必要十分条件は、 $q = 1 - p$ 、すなわち $C = B$ であることを示せ。
- (3) x, y を実数、 n を自然数とすると、 $(xA + yB)^n = x^n A + y^n B$ が成り立つことを示せ。

2 座標平面の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲において、2つの曲線 $y = \cos x$ と $y = \sin 2x$ の交点の座標を (a, b) とし、2つの曲線 $y = \cos x$ と $y = \tan x$ の交点の座標を (c, d) とする。次の問いに答えよ。

- (1) a, b および d^2 の値を求めよ。
- (2) $c > a$ であることを示せ。
- (3) 連立不等式

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad \cos x \leq y \leq \sin 2x, \quad y \geq \tan x$$

の表す領域を図示し、その領域の面積を求めよ。

3 $a > 1$ を満たす定数 a に対し、座標が (a, a) である点を A とする。関数 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) のグラフ上を動く点 $P(t, \frac{1}{t})$ をとり、 $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ を、長さ AP を用いて $f(t) = AP^2$ で定める。次の問いに答えよ。

- (1) $f(t)$ を t と a を用いて表せ。
- (2) $f'(t) = 0$ となる t ($t > 0$) の値を求めよ。
- (3) AP が最小になるような点 P の座標と、 AP の最小値を求めよ。

4 $OA = 4, OB = 5$ である三角形 OAB に対し、 $k = AB, \vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を k を用いて表せ。
- (2) $\angle AOB$ の二等分線と辺 AB の交点を $P, \angle OAB$ の二等分線と辺 OB の交点を Q とする。 \vec{OP}, \vec{OQ} を k, \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。
- (3) 三角形 OAB の内心を I とする。 \vec{OI} を k, \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。
- (4) (3) の I と直線 OA 上の点 H に対して、 $IH \perp OA$ が成り立つとき、 \vec{IH} を k, \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。

2013年度 大阪市立大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

2

(1) $a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}, d^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

(2) 証明は省略

(3) 図示は省略, $\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \log(-1 + \sqrt{5})$

3

(1) $f(t) = t^2 - 2at + 2a^2 - \frac{2a}{t} + \frac{1}{t^2}$

(2)
$$\begin{cases} 1 < a \leq 2 \text{ のとき, } & t = 1 \\ 2 < a \text{ のとき, } & t = 1, \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} 1 < a \leq 2 \text{ のとき, } & \text{最小値: } \sqrt{2}(a-1), P(1, 1) \\ 2 < a \text{ のとき, } & \text{最小値: } \sqrt{a^2 - 2}, P\left(\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \text{ (複号同順)} \end{cases}$$

4

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{41 - k^2}{2}$

(3) $\vec{OI} = \frac{5}{k+9} \vec{a} + \frac{4}{k+9} \vec{b}$

(2) $\vec{OP} = \frac{5}{9} \vec{a} + \frac{4}{9} \vec{b}, \vec{OQ} = \frac{4}{k+4} \vec{b}$

(4) $\vec{IH} = \frac{41 - k^2}{8(k+9)} \vec{a} - \frac{4}{k+9} \vec{b}$