2012 年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分　　全問必答

1　$a>0$ とする。C_1 を曲線 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$，C_2 を直線 $y=2ax-3a$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が C_1 上を動き，点 Q が C_2 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を $f(a)$ とする。$f(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} f(a)$ を求めよ。

2　次の 2 つの条件 (i)，(ii) をみたす自然数 n について考える。

(i)　n は素数ではない。

(ii)　l，m を 1 でも n でもない n の正の約数とすると，必ず

$$|l-m|\leqq 2$$

である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　n が偶数のとき，(i)，(ii) をみたす n をすべて求めよ。

(2)　n が 7 の倍数のとき，(i)，(ii) をみたす n をすべて求めよ。

(3)　$2\leqq n\leqq 1000$ の範囲で，(i)，(ii) をみたす n をすべて求めよ。

3　xyz 空間に 3 点 O$(0,\,0,\,0)$，A$(1,\,0,\,1)$，B$(0,\,\sqrt{3},\,1)$ がある。平面 $z=0$ に含まれ，中心が O，半径が 1 の円を W とする。点 P が線分 OA 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく。同様に点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく。さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　平面 $z=\cos\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ。

(2)　立体 V の体積を求めよ。

4　5 次式 $f(x)=x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t$　（p，q，r，s，t は実数）について考える．このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　数列 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ が等差数列であることと，

$$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m$$

（l，m は実数）と書けることは互いに同値であることを示せ。

(2)　$f(x)$ は (1) の条件をみたすものとする。α を実数，k を 3 以上の自然数とする。k 項からなる数列

$$f(\alpha),\ f(\alpha+1),\ f(\alpha+2),\ \cdots,\ f(\alpha+k-1)$$

が等差数列となるような α，k の組をすべて求めよ。

5　1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，1 回目に出る目を l，2 回目に出る目を m，3 回目に出る目を n で表すことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　極限値

$$\lim_{x\to-1}\frac{lx^2+mx+n}{x+1}$$

が存在する確率を求めよ。

(2)　関数

$$f(x)=\frac{lx^2+mx+n}{x+1}$$

が，$x>-1$ の範囲で極値をとる確率を求めよ。

2012年度　大阪大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $f(a)=\dfrac{(3-\sqrt{5})a}{\sqrt{4a^2+1}}$

(2) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

2

(1) $n=4,\ 6,\ 8$

(2) $n=35,\ 49$

(3) $n=4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 15,\ 25,\ 35,\ 49,\ 121,\ 143,\ 169,\ 289,\ 323,\ 361,\ 529,\ 841,\ 899,\ 961$

3

(1) $2\theta-\sin 2\theta$

(2) $\dfrac{4}{3}$

4

(1) 証明は省略

(2) $(\alpha,\ k)=(0,\ 3),\ (0,\ 4),\ (0,\ 5),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3)$

5

(1) $\dfrac{5}{72}$

(2) $\dfrac{181}{216}$