2008年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　2 次の正方行列 A_0，A_1，A_2，A_3，…… を

$$A_0=O,\ A_n=B+A_{n-1}C \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。ただし，O は 2 次の零行列，B と C は 2 次の正方行列とする。

(1)　$A_n(E-C)$ を B と C を用いて表せ。ここで E は 2 次の単位行列とする。

(2)　B と C を

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，A_{3n} を求めよ。

2　点 O で交わる 2 つの半直線 OX，OY があって $\angle\mathrm{XOY}=60^\circ$ とする。2 点 A，B が OX 上に O，A，B の順に，また，2 点 C，D が OY 上に O，C，D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s，線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2)　点 A，B と C，D が，$s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。

3　N を 2 以上の自然数とする。

(1)　関数 $f(x)=(N-x)\log x$ を $1 \leqq x \leqq N$ の範囲で考える。このとき，曲線 $y=f(x)$ は上に凸であり，関数 $f(x)$ は極大値を 1 つだけとる。このことを示せ。

(2)　自然数の列 a_1，a_2，……，a_N を

$$a_n=n^{N-n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$$

で定める。a_1，a_2，……，a_N のうちで最大の値を M とし，$M=a_n$ となる n の個数を k とする。このとき $k \leqq 2$ であることを示せ。

(3)　(2) で $k=2$ となるのは，N が 2 のときだけであることを示せ。

4　t を負の実数とし，xy 平面上で曲線 $y=2^{2x+2t}$ と曲線 $y=2^{x+3t}$ および y 軸で囲まれる部分を D とする。

(1)　D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2)　t が負の実数の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ。

5　1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い，表が 500 回続けて出たときに終わるものとする。n を 500 以上の自然数とするとき，この反復試行が n 回目で終わる確率を $p(n)$ とする。

(1)　$501 \leqq n \leqq 1000$ のとき，$p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し，またその値を求めよ。

(2)　$p(1002) - p(1001)$ の値を求めよ。

(3)　$1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき，$p(n+1) - p(n)$ の値を求めよ。

2008年度　大阪大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　$A_n(E-C)=B(E-C^n)$

（2）　$A_{3n}=\dfrac{1-(-8)^n}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

2

（1）　$\mathrm{MN}=\dfrac{1}{2}\sqrt{s^2+st+t^2}$

（2）　$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

3

（1）　証明は省略　（2）　証明は省略　（3）　証明は省略

4

（1）　$V(t)=\dfrac{\pi}{4\log 2}(2^{8t}-2^{6t+1}+2^{4t})$

（2）　$\dfrac{\pi}{64\log 2}$　$\left(t=-\dfrac{1}{2}\right)$

5

（1）　証明は省略，$\dfrac{1}{2^{501}}$

（2）　$-\dfrac{1}{2^{1002}}$

（3）　証明は省略，$-\dfrac{1}{2^{1002}}$