2007 年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　n を自然数とする。関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを C とし，C 上の 2 点 $(n,\ \sqrt{n})$ と $(n+1,\ \sqrt{n+1})$ を通る直線を ℓ とする。C と ℓ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。このとき $\lim_{n\to\infty} n^a V = b$ を満たす正の数 a，b を求めよ。

2　次の問いに答えよ。

(1)　x が正の数のとき $|\log x| \leqq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示せ。

(2)　p，q，r が $p+q+r=1$ を満たす正の数のとき $p^2+q^2+r^2 \geqq \dfrac{1}{3}$ を示せ。

(3)　a，b，c が相異なる正の数で，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ を満たすとき

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \frac{1}{3}$$

を示せ。

3　xy 平面において，原点 O を通る半径 r（$r>0$）の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件 (a)，(b) で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1) の直線を ℓ とする。ℓ が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。

4　$f(x)=x^3-x$ とし，t を実数とする。xy 平面において，曲線 $y=f(x)$ を C_1 とし，直線 $x=t$ に関して C_1 と対称な曲線 $y=f(2t-x)$ を C_2 とする。

(1)　C_1 と C_2 が 3 点で交わるとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　t が (1) で求めた範囲を動くとき，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S の最大値を求めよ。

5　n を 2 以上の自然数とする。4 個の行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を重複を許して n 個並べたものを M_1，M_2，$\cdots$，M_n とする。

(1)　積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できる場合は何通りあるか。その数を n の式で表せ。

(2)　積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できて，その積が零行列でない 2×3 行列となる場合は何通りあるか。その数を n の式で表せ。

(3)　積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できて，その積が零行列とならない場合は何通りあるか。その数を n の式で表せ。

2007 年度　大阪大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1 $a=1,\ b=\frac{\pi}{24}$

2

（1） 証明は省略　（2） 証明は省略　（3） 証明は省略

3

（1） 証明は省略　（2） $r>\frac{1}{2}$

4

（1） $-\frac{1}{\sqrt{3}}<t<\frac{1}{\sqrt{3}}$　（2） 最大値：1　$(t=0)$

5

（1） 2^{n+1}（通り）　（2） n（通り）　（3） $\frac{1}{2}(n^2+3n+4)$（通り）