

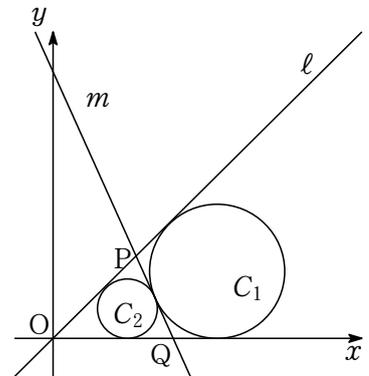
◀2016年 筑波大学（前期）▶

1 k を実数とする. xy 平面の曲線 $C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ が異なる共有点 P, Q を持つとする. ただし点 P, Q の x 座標は正であるとする. また, 原点を O とする.

- (1) k のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) k が (1) の範囲を動くとき, $\triangle OPQ$ の重心 G の軌跡を求めよ.
- (3) $\triangle OPQ$ の面積を S とするとき, S^2 を k を用いて表せ.
- (4) k が (1) の範囲を動くとする. $\triangle OPQ$ の面積が最大となるような k の値と, そのときの重心 G の座標を求めよ.

2 xy 平面の直線 $y = (\tan 2\theta)x$ を l とする. ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ とする. 図で示すように, 円 C_1, C_2 を以下の (i)~(iv) で定める.

- (i) 円 C_1 は直線 l および x 軸の正の部分と接する.
- (ii) 円 C_1 の中心は第 1 象限にあり, 原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である.
- (iii) 円 C_2 は直線 l , x 軸の正の部分, および円 C_1 と接する.
- (iv) 円 C_2 の中心は第 1 象限にあり, 原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1 > d_2$ を満たす.



円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち, x 軸, 直線 l と異なる直線を m とし, 直線 m と直線 l , x 軸との交点をそれぞれ P, Q とする.

- (1) 円 C_1, C_2 の半径を $\sin \theta, \cos \theta$ を用いて表せ.
- (2) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき, 線分 PQ の長さの最大値を求めよ.
- (3) (2) の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ.

3 四面体 $OABC$ において, $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とおく. このとき等式

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1$$

が成り立つとする. t は実数の定数で, $0 < t < 1$ を満たすとする. 線分 OA を $t : 1 - t$ に内分する点を P とし, 線分 BC を $t : 1 - t$ に内分する点を Q とする. また, 線分 PQ の中点を M とする.

- (1) \vec{OM} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と t を用いて表せ.
- (2) 線分 OM と線分 BM の長さが等しいとき, 線分 OB の長さを求めよ.
- (3) 4 点 O, A, B, C が点 M を中心とする同一球面上にあるとする. このとき, $\triangle OAB$ と $\triangle OCB$ は合同であることを示せ.

4 関数 $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$ ($x \geq 0$) について次の問いに答えよ.

- (1) $f'(a) = 0, f''(b) = 0$ を満たす a, b を求め, $y = f(x)$ のグラフの概形を描け. ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0$ であることは証明なしで用いてよい.
- (2) $k \geq 0$ のとき $V(k) = \int_0^k xe^{-2x} dx$ を k を用いて表せ.
- (3) (1) で求めた a, b に対して曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

5 $\triangle PQR$ において $\angle RPQ = \theta$, $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ とする. 点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次で定める.

$$P_1 = P, P_2 = Q, P_n P_{n+2} = P_n P_{n+1}$$

ただし, 点 P_{n+2} は線分 $P_n R$ 上にあるものとする.

実数 θ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

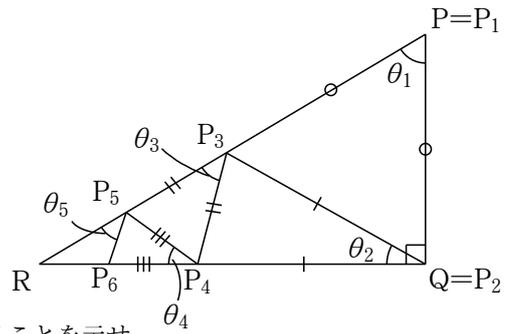
$$\theta_n = \angle P_{n+1} P_n P_{n+2} \quad (0 < \theta_n < \pi)$$

で定める.

(1) θ_2, θ_3 を θ を用いて表せ.

(2) $\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は n によらない定数であることを示せ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ を求めよ.



6 複素数平面上を動く点 z を考える. 次の問いに答えよ.

(1) 等式 $|z - 1| = |z + 1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ.

(2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき, $w = \frac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる. この図形を描け.

(3) a を正の実数とする. 点 z が虚軸上を動くとき, $w = \frac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる. この円の中心と半径を求めよ.

出題範囲と難易度

- 1** 標準 II 図形と方程式
- 2** 標準 II 三角関数・微分積分
- 3** 標準 B ベクトル (空間)
- 4** 標準 III 微分法の応用・積分法の応用
- 5** 標準 III 数列の極限
- 6** 標準 III 複素数平面

略解

1 (1) $1 < k < \sqrt{2}$

(2) 線分: $y = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$

(3) $S^2 = \frac{1}{16} (k^2 - 1)^2 (2 - k^2)$

(4) $k = \frac{\sqrt{15}}{3}, G\left(\frac{\sqrt{15}}{9}, \frac{1}{3}\right)$

2 (1) C_1 の半径: $2 \sin^2 \theta \cos \theta$, C_2 の半径: $\frac{2 \sin^2 \theta \cos \theta (1 - \sin \theta)}{1 + \sin \theta}$

(2) 最大値: $\frac{16}{27}$

(3) $m: y = -\frac{\sqrt{5}}{2} \left(x - \frac{4}{9} \right)$

3 (1) $\vec{OM} = \frac{t}{2} \vec{a} + \frac{1-t}{2} \vec{b} + \frac{t}{2} \vec{c}$

(2) $OB = \sqrt{2}$

(3) 証明は省略

4 (1) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

グラフは右図

(2) $V(k) = -\frac{2k+1}{4} e^{-2k} + \frac{1}{4}$

(3) $\left\{ \frac{2}{e} - (2 + \sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}} \right\} \pi$

5 (1) $\theta_2 = \frac{\theta}{2}, \theta_3 = \frac{3}{4}\theta$

(2) 証明は省略

(3) $\frac{2}{3}\theta$

6 (1) 証明は省略

(2) 右図

(3) 中心: $\frac{a-1}{2a}$, 半径: $\frac{a+1}{2a}$

