◀2014 年　筑波大学（前期）▶

1　$f(x)=x^3-x$ とする．$y=f(x)$ のグラフに点 $\mathrm{P}(a,\,b)$ から引いた接線は 3 本あるとする．3 つの接点 $\mathrm{A}(\alpha,\,f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\,f(\beta))$，$\mathrm{C}(\gamma,\,f(\gamma))$ を頂点とする三角形の重心を G とする．

(1)　$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ および $\alpha\beta\gamma$ を $a,\,b$ を用いて表せ．

(2)　点 G の座標を $a,\,b$ を用いて表せ．

(3)　点 G の x 座標が正で，y 座標が負となるような点 P の範囲を図示せよ．

2　xy 平面上の曲線 $C:y=x\sin x+\cos x-1$ $(0<x<\pi)$ に対して，以下の問いに答えよ．ただし $3<\pi<\dfrac{16}{5}$ であることは証明なしで用いてよい．

(1)　曲線 C と x 軸の交点はただ 1 つであることを示せ．

(2)　曲線 C と x 軸の交点を $\mathrm{A}(\alpha,\,0)$ とする．$\alpha>\dfrac{2}{3}\pi$ であることを示せ．

(3)　曲線 C, y 軸および直線 $y=\dfrac{\pi}{2}-1$ で囲まれる部分の面積を S とする．また，xy 平面の原点 O，点 A および曲線 C 上の点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{\pi}{2}-1\right)$ を頂点とする三角形 OAB の面積を T とする．$S<T$ であることを示せ．

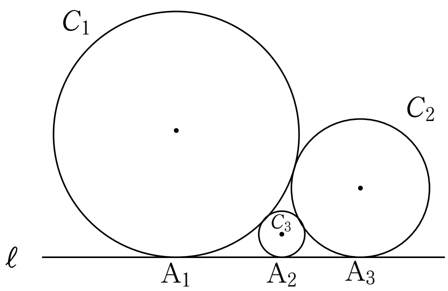
3　関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ を $x>0$ で考える．$y=f(x)$ のグラフの点 $(a,\,f(a))$ における接線を ℓ_a とし，ℓ_a と y 軸との交点を $(0,\,Y(a))$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，実数 k に対して $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^ke^{-t}=0$ であることは証明なしで用いてよい．

(1)　$Y(a)$ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　$0<a<b$ である $a,\,b$ に対して，ℓ_a と ℓ_b が x 軸上で交わるとき，a のとりうる値の範囲を求め，b を a で表せ．

(3)　(2) の $a,\,b$ に対して，$Z(a)=Y(a)-Y(b)$ とおく．$\displaystyle\lim_{a\to+0}Z(a)$ および $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{Z'(a)}{a}$ を求めよ．

4　平面上の直線 ℓ に同じ側で接する 2 つの円 C_1, C_2 があり，C_1 と C_2 も互いに外接している．ℓ, C_1, C_2 で囲まれた領域内に，これら 3 つと互いに接する円 C_3 を作る．同様に ℓ, C_n, C_{n+1} $(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ で囲まれた領域内にあり，これら 3 つと互いに接する円を C_{n+2} とする．円 C_n の半径を r_n とし，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，$r_1=16$, $r_2=9$ とする．



(1)　ℓ が C_1, C_2, C_3 と接する点を，それぞれ A_1, A_2, A_3 とおく．線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$, $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の長さおよび r_3 の値を求めよ．

(2)　ある定数 $a,\,b$ に対して $x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$ $(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ となることを示せ．$a,\,b$ の値も求めよ．

(3)　(2) で求めた $a,\,b$ に対して，2 次方程式 $t^2=at+b$ の解を $\alpha,\,\beta$ $(\alpha>\beta)$ とする．$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$ を満たす有理数 $c,\,d$ の値を求めよ．ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい．

(4)　(3) の $c,\,d,\,\alpha,\,\beta$ に対して，

$$x_n=c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1}\quad(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

となることを示し，数列 $\{r_n\}$ の一般項を $\alpha,\,\beta$ を用いて表せ．

5　実数を成分とする正方行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1)　$AB=BA$ を満たす A は，実数 $x,\, y$ を用いて $A=xB+yE$ と表せることを示せ．

(2)　$A^3=E$ のとき

$$(t^2-\varDelta)A=(t\varDelta+1)E$$

を示せ．ただし，$t=a+d,\, \varDelta=ad-bc$ とする．

(3)　$AB=BA$ かつ $A^3=E$ を満たす A をすべて求めよ．

6　xy 平面上に楕円

$$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}=1\quad (a>\sqrt{13})$$

および双曲線

$$C_2:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad (b>0)$$

があり，C_1 と C_2 は同一の焦点をもつとする．また C_1 と C_2 の交点 $\mathrm{P}\left(2\sqrt{1+\frac{t^2}{b^2}},\ t\right)$ $(t>0)$ における $C_1,\, C_2$ の接線をそれぞれ $\ell_1,\, \ell_2$ とする．

(1)　a と b の間に成り立つ関係式を求め，点 P の座標を a を用いて表せ．

(2)　ℓ_1 と ℓ_2 が直交することを示せ．

(3)　a が $a>\sqrt{13}$ を満たしながら動くときの点 P の軌跡を図示せよ．

出題範囲と難易度

1　やや難　II　図形と方程式・微分積分

2　標準　III　微分法の応用・積分法の応用

3　標準　III　関数の極限・微分法の応用

4　標準　B　数列

5　標準　C　行列

6　標準　C　いろいろな曲線

略解

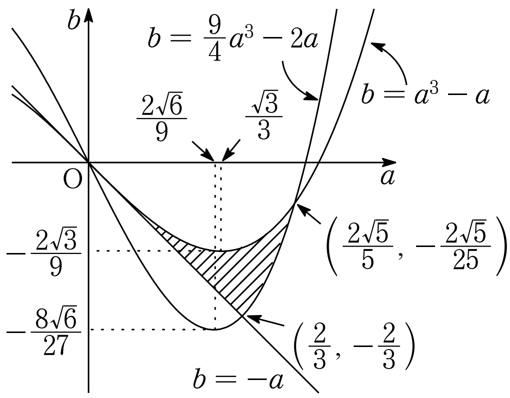
1 (1)

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=\dfrac{3}{2}a \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

(2) $\mathrm{G}\left(\dfrac{1}{2}a,\ \dfrac{9}{8}a^3-a-\dfrac{1}{2}b\right)$

(3) $a>0$ かつ $b>-a$ かつ $\dfrac{9}{4}a^3-2a<b<a^3-a$

右図斜線部分で，境界線上の点は含まない．



2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

3 (1) $0<Y(a)\leqq\dfrac{2}{\sqrt{e}}$

(2) $0<a<1,\quad b=\dfrac{1}{a}$

(3) $\displaystyle\lim_{a\to+0}Z(a)=1\ ,\quad \lim_{a\to+0}\frac{Z'(a)}{a}=1$

4 (1) $\mathrm{A_1A_2}=24,\quad \mathrm{A_1A_3}=\dfrac{96}{7},\quad \mathrm{A_2A_3}=\dfrac{72}{7},\quad r_3=\dfrac{144}{49}$

(2) 証明は省略．$a=1,\ b=1$

(3) $c=d=\dfrac{1}{12}$

(4) 証明は省略．$r_n=\dfrac{144}{(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})^2}$

5 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6 (1) $a^2-b^2=13,\quad \mathrm{P}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}},\ \dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}\right)$

(2) 証明は省略

(3) 円弧：$x^2+y^2=13\ (2<x<\sqrt{13},\ y>0)$

軌跡は，右図太実線部分