◀2013 年　筑波大学（前期）▶

1　$f(x)$, $g(t)$ を

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$
$$g(t) = \cos 3t - \cos 2t + \cos t$$

とおく．

(1)　$2g(t) - 1 = f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ．

(2)　$\theta = \dfrac{\pi}{7}$ のとき，$2g(\theta)\cos\theta = 1 + \cos\theta - 2g(\theta)$ が成り立つことを示せ．

(3)　$2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 $f(x) = 0$ の解であることを示せ．

2　n は自然数とする．

(1)　$1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t\, dt = (-1)^{k+1}\frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$

が成り立つことを示せ．

(2)　媒介変数 t によって

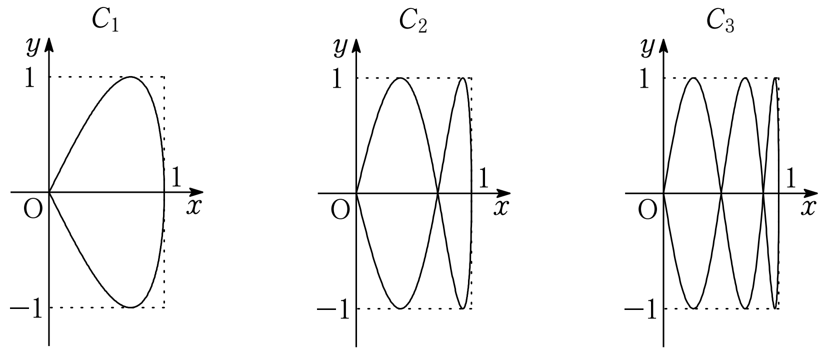
$$x = \sin t,\quad y = \sin 2nt \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ．ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}} - 1\right) \quad (n \geqq 2)$$

を用いてよい．

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．



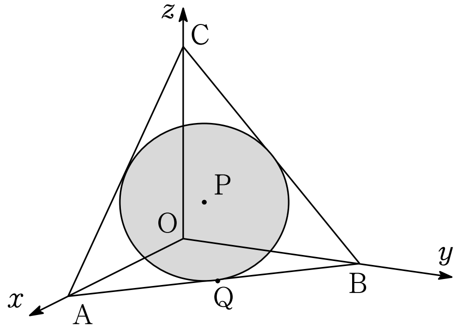
3　xyz 空間において，点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) を通る平面上にあり，正三角形 ABC に内接する円板を D とする．円板 D の中心を P，円板 D と辺 AB の接点を Q とする．

(1)　点 P と点 Q の座標を求めよ．

(2)　円板 D が平面 $z = t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ．

(3)　円板 D と平面 $z = t$ の共通部分が線分であるとき，その線分の長さを t を用いて表せ．

(4)　円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．



4　3 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が

$$a_{n+1} = -b_n - c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$
$$b_{n+1} = -c_n - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$
$$c_{n+1} = -a_n - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

および $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ を満たすとする．ただし，a, b, c は定数とする．

(1)　$p_n = a_n + b_n + c_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で与えられる数列 $\{p_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　$q_n = (-1)^n\{(a_n)^2 + (b_n)^2 + (c_n)^2\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で与えられる数列 $\{q_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和を T_n とする．$a + b + c$ が奇数であれば，すべての自然数 n に対して T_n が正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ．

5　2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，a, b, c, d は実数とする．

(1)　$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しないことを示せ．

(2)　$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A をすべて求めよ．

(3)　(2) で求めた A のそれぞれについて $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2013}$ を求めよ．

6　楕円 $C : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ の，直線 $y = mx$ と平行な 2 接線を ℓ_1, $\ell_1{}'$ とし，ℓ_1, $\ell_1{}'$ に直交する C の 2 接線を ℓ_2, $\ell_2{}'$ とする．

(1)　ℓ_1, $\ell_1{}'$ の方程式を m を用いて表せ．

(2)　ℓ_1 と $\ell_1{}'$ の距離 d_1 および ℓ_2 と $\ell_2{}'$ の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ．ただし，平行な 2 直線 ℓ, ℓ' の距離とは，ℓ 上の 1 点と直線 ℓ' の距離である．

(3)　$(d_1)^2 + (d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ．

(4)　ℓ_1, $\ell_1{}'$, ℓ_2, $\ell_2{}'$ で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ．さらに m が変化するとき，S の最大値を求めよ．

出題範囲と難易度

- **1**　標準　$\boxed{\text{II}}$ 三角関数
- **2**　やや難　$\boxed{\text{III}}$ 数列の極限・積分法の応用・$\boxed{\text{C}}$ いろいろな曲線
- **3**　やや難　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用
- **4**　標準　$\boxed{\text{B}}$ 数列
- **5**　標準　$\boxed{\text{C}}$ 行列
- **6**　標準　$\boxed{\text{C}}$ いろいろな曲線

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

略解

1 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

2 (1) 証明は省略

(2) $S_n = \dfrac{4n}{4n^2-1} \cdot \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{\pi}$

3 (1) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$,　$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$

(2) $0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}$

(3) $2\sqrt{t-\dfrac{3}{2}t^2}$

(4) $\dfrac{2}{27}\pi$

4 (1) $S_n = \dfrac{1}{3}(a+b+c)\{1-(-2)^n\}$

(2) $a_n = a - \dfrac{1}{3}(a+b+c)\{1-(-2)^{n-1}\}$

$b_n = b - \dfrac{1}{3}(a+b+c)\{1-(-2)^{n-1}\}$

$c_n = c - \dfrac{1}{3}(a+b+c)\{1-(-2)^{n-1}\}$

(3) 証明は省略

5 (1) 証明は省略

(2) $A = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A + A^2 + A^3 + \cdots\cdots + A^{2013} = \left(1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

6 (1) $\ell_1 : y = mx + \sqrt{16m^2+9}$,　$\ell_1{}' : y = mx - \sqrt{16m^2+9}$

(2) $d_1 = \dfrac{2\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}$,　$d_2 = \dfrac{2\sqrt{9m^2+16}}{\sqrt{m^2+1}}$

(3) 証明は省略

(4) $S = d_1\sqrt{100-{d_1}^2}$

S の最大値は 50（$m = \pm 1$）

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto