◀2012 年　筑波大学（前期）▶

1　x の方程式 $|\log_{10} x| = px + q$（p, q は実数）が 3 つの相異なる正の解をもち，次の 2 つの条件を満たすとする．

（I）3 つの解の比は，1 : 2 : 3 である．

（II）3 つの解のうち最小のものは，$\dfrac{1}{2}$ より大きく，1 より小さい．

このとき，$A = \log_{10} 2$, $B = \log_{10} 3$ とおき，p と q を A と B を用いて表せ．

2　曲線 $C : y = \dfrac{1}{x+2}$ $(x > -2)$ を考える．曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ_1 とし，ℓ_1 と x 軸との交点を Q_1，点 Q_1 を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_2 とおく．以下同様に，自然数 n $(n \geqq 2)$ に対して，点 P_n における接線を ℓ_n とし，ℓ_n と x 軸との交点を Q_n，点 Q_n を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_{n+1} とおく．

(1)　ℓ_1 の方程式を求めよ．

(2)　P_n の x 座標を x_n $(n \geqq 1)$ とする．x_{n+1} を x_n を用いて表し，x_n を n を用いて表せ．

(3)　ℓ_n, x 軸, y 軸で囲まれる三角形の面積 S_n を求め，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

3　曲線 $C : y = \log x$ $(x > 0)$ を考える．自然数 n に対して，曲線 C 上に点 $\mathrm{P}(e^n, n)$, $\mathrm{Q}(e^{2n}, 2n)$ をとり，x 軸上に点 $\mathrm{A}(e^n, 0)$, $\mathrm{B}(e^{2n}, 0)$ をとる．四角形 APQB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $V(n)$ とする．また，線分 PQ と曲線 C で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $S(n)$ とする．

(1)　$V(n)$ を n の式で表せ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{V(n)}$ を求めよ．

4　四面体 OABC において，次が満たされているとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

点 A, B, C を通る平面を α とする．点 O を通り平面 α と直交する直線と，平面 α との交点を H とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であることを示せ．

(2)　点 H は △ABC の垂心であること，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を示せ．

(3)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 1$ とする．このとき，△ABC の各辺の長さおよび線分 OH の長さを求めよ．

5　以下の問いに答えよ．

(1)　座標平面において原点のまわりに角 θ $(0 < \theta < \pi)$ だけ回転する移動を表す行列を A とする．A が等式 $A^2 - A + E = O$ を満たすとき，θ と A を求めよ．ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

(2)　直線 $y = \sqrt{3}x$ に関する対称移動を表す行列 B を求めよ．

(3)　直線 $y = kx$ に関する対称移動を表す行列を C とする．(1), (2) において求めた行列 A, B に対して $BC = A$ が成り立つとき，k を求めよ．

6　2 つの双曲線 $C : x^2 - y^2 = 1$, $H : x^2 - y^2 = -1$ を考える．双曲線 H 上の点 $\mathrm{P}(s, t)$ に対して，方程式 $sx - ty = 1$ で定まる直線を ℓ とする．

(1)　直線 ℓ は点 P を通らないことを示せ.

(2)　直線 ℓ と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わることを示し，△PQR の重心 G の座標を $s,\ t$ を用いて表せ.

(3)　(2) における 3 点 G, Q, R に対して，△GQR の面積は点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の位置によらず一定であることを示せ.

出題範囲と難易度

1　標準　$\boxed{\text{II}}$ 指数関数・対数関数

2　標準　$\boxed{\text{III}}$ 数列の極限

3　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用・積分法の応用

4　標準　$\boxed{\text{B}}$ ベクトル（空間）

5　標準　$\boxed{\text{C}}$ 1次変換

6　標準　$\boxed{\text{C}}$ いろいろな曲線

略解

1　　$p=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(B-A)$,　$q=2A-\dfrac{3}{2}B$

2（1）$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$

（2）$x_{n+1}=2x_n+2$,　$x_n=2^n-2\ (n\geqq 1)$

（3）$S_n=2\left(\dfrac{2^n-1}{2^n}\right)^2$,　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=2$

3（1）$V(n)=\dfrac{7\pi}{3}n^2e^n(e^n-1)$

（2）$\dfrac{5}{7}$

4（1）証明は省略

（2）証明は省略

（3）$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\sqrt{6}$,　$\mathrm{OH}=\sqrt{2}$

5（1）$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$

（2）$B=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$

（3）$k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

6（1）証明は省略

（2）証明は省略．$\mathrm{G}\left(-\dfrac{s}{3},\ -\dfrac{t}{3}\right)$

（3）証明は省略