# ◀2011 年　筑波大学（前期）▶

**1**　O を原点とする $xy$ 平面において，直線 $y=1$ の $|x|\geqq 1$ を満たす部分を $C$ とする．

(1)　$C$ 上に点 $\mathrm{A}(t,\,1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2)　点 A が $C$ 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ．

**2**　自然数 $n$ に対し，関数

$$F_n(x)=\int_x^{2x} e^{-t^n}\,dt \quad (x\geqq 0)$$

を考える．

(1)　関数 $F_n(x)$ $(x\geqq 0)$ はただ一つの点で最大値をとることを示し，$F_n(x)$ が最大となるような $x$ の値 $a_n$ を求めよ．

(2)　(1) で求めた $a_n$ に対し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n$ を求めよ．

**3**　$\alpha$ を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．円 $C:x^2+(y+\sin\alpha)^2=1$ および，その中心を通る直線 $\ell:y=(\tan\alpha)x-\sin\alpha$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　直線 $\ell$ と円 $C$ の 2 つの交点の座標を $\alpha$ を用いて表せ．

(2)　等式

$$2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ．

(3)　連立不等式

$$\begin{cases} y\leqq(\tan\alpha)x-\sin\alpha \\ x^2+(y+\sin\alpha)^2\leqq 1 \end{cases}$$

の表す $xy$ 平面上の図形を $D$ とする．図形 $D$ を $x$ 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

**4**　数列 $\{a_n\}$ を，

$$a_1=1,\ (n+3)a_{n+1}-na_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2} \qquad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

によって定める．

(1)　$b_n=n(n+1)(n+2)a_n$ $(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ によって定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　等式

$$p(n+1)(n+2)+qn(n+2)+rn(n+1)=b_n \qquad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

が成り立つように，定数 $p,\,q,\,r$ の値を定めよ．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を $n$ の式で表せ．

**5**　実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える．座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(x,\,y)$, $\mathrm{Q}(u,\,v)$ について等式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき，行列 $A$ により点 P は点 Q に移るという．

点 $(1, 3)$ は行列 $A$ により点 $(10, 10)$ に移り，さらに等式

$$A^2 - 7A + 10E = O$$

が成り立つものとする．ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　行列 $A$ により点 $(10, 10)$ が移る点の座標を求めよ．

(2)　実数 $a, b, c, d$ の値を求めよ．

(3)　次の条件 $(*)$ を満たす直線 $\ell$ の方程式を求めよ．

$(*)$　直線 $\ell$ 上のすべての点が行列 $A$ により $\ell$ 上の点に移る．

**6**　$d$ を正の定数とする．2 点 $\mathrm{A}(-d, 0)$, $\mathrm{B}(d, 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 $E$ を考える．点 A，点 B，原点 O から楕円 $E$ 上の点 P までの距離をそれぞれ AP, BP, OP と書く．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　楕円 $E$ の長軸と短軸の長さを求めよ．

(2)　$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2$ および $\mathrm{AP} \cdot \mathrm{BP}$ を，OP と $d$ を用いて表せ．

(3)　点 P が楕円 $E$ 全体を動くとき，$\mathrm{AP}^3 + \mathrm{BP}^3$ の最大値と最小値を $d$ を用いて表せ．

## 出題範囲と難易度

**1**　標準　II 図形と方程式

**2**　標準　III 極限・微分法の応用・積分法

**3**　標準　III 積分法の応用

**4**　標準　B 数列

**5**　標準　C 行列・１次変換

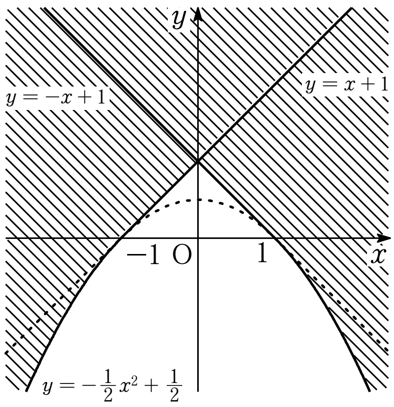
**6**　標準　C いろいろな曲線

# 略解

**1** (1)　$2tx+2y-t^2-1=0$

(2)　$\begin{cases} y \geqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2} & (|x| \geqq 1) \\ y \geqq x+1 \text{ または } y \geqq -x+1 & (|x| \leqq 1) \end{cases}$

右図斜線部分で，境界線上の点を含む．




**2** (1)　証明は省略．$a_n=\left(\dfrac{\log 2}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=-\log 2$

**3** (1)　$(\cos\alpha,\ 0)$，$(-\cos\alpha,\ -2\sin\alpha)$

(2)　証明は省略

(3)　$\pi^2\sin\alpha+\dfrac{4}{3}\pi\cos\alpha$

**4** (1)　$b_n=n+5$

(2)　$p=\dfrac{5}{2}$，$q=-4$，$r=\dfrac{3}{2}$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(7n+17)}{4(n+1)(n+2)}$

**5** (1)　$(60,\ 40)$

(2)　$a=4$，$b=2$，$c=1$，$d=3$

(3)　$y=\dfrac{1}{2}x$，$y=-x$

**6** (1)　長軸：$4d$，　短軸：$2\sqrt{3}d$

(2)　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=2(\mathrm{OP}^2+d^2)$，　$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}=7d^2-\mathrm{OP}^2$

(3)　最大値：$28d^3$，　最小値：$16d^3$