◀2009 年　筑波大学（前期）▶

1　以下の問いに答えよ．

(1)　等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を示せ．

(2)　$2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ．

(3)　$x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となる角度 $\alpha,\ \beta$ を求めよ．ただし $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする．

2　xyz 空間内において，yz 平面上で放物線 $z = y^2$ と直線 $z = 4$ で囲まれる平面図形を D とする．点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とし，l のまわりに D を 1 回転させてできる立体を E とする．

(1)　D と平面 $z = t$ との交わりを D_t とする．ただし $0 \leqq t \leqq 4$ とする．点 P が D_t 上を動くとき，点 P と点 $(1,\ 1,\ t)$ との距離の最大値，最小値を求めよ．

(2)　平面 $z = t$ による E の切り口の面積 $S(t)$ $(0 \leqq t \leqq 4)$ を求めよ．

(3)　E の体積 V を求めよ．

3　$f(x)$ を整式で表される関数とし，$g(x) = \int_0^x e^t f(t)\,dt$ とおく．任意の実数 x について

$$x(f(x) - 1) = 2\int_0^x e^{-t} g(t)\,dt$$

が成り立つとする．

(1)　$xf''(x) + (x+2)f'(x) - f(x) = 1$ が成り立つことを示せ．

(2)　$f(x)$ は定数または 1 次式であることを示せ．

(3)　$f(x)$ および $g(x)$ を求めよ．

4　自然数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は

$$(5 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすものとする．

(1)　$\sqrt{2}$ は無理数であることを示せ．

(2)　$a_{n+1},\ b_{n+1}$ を $a_n,\ b_n$ を用いて表せ．

(3)　すべての自然数 n に対して $a_{n+1} + pb_{n+1} = q(a_n + pb_n)$ が成り立つような定数 $p,\ q$ を 2 組求めよ．

(4)　$a_n,\ b_n$ を n を用いて表せ．

5　実数 a に対し，行列 $A = \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix}$ を考える．n を自然数とし，座標平面上において，行列 A^n により点 $(1,\ 0)$ が点 P_n に移り，点 $(0,\ 1)$ が点 Q_n に移るものとする．2 点 $\mathrm{P}_n,\ \mathrm{Q}_n$ の間の距離を $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ で表す．

(1)　$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ を求めよ．

(2)　A^n を a と n を用いて表せ．

(3)　n が固定され，a が実数全体を動くとき，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ の最小値を求めよ．

6　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が双曲線 $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上を動くとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする．

（1）　$f(a)$ を a で表せ.

（2）　$f(a)$ を a の関数とみなすとき, ab 平面上に曲線 $b = f(a)$ の概形をかけ.

出題範囲と難易度

1　標準　II 三角関数

2　標準　III 積分法の応用

3　標準　III 微分法・積分法

4　標準　B 数列

5　標準　C 行列

6　標準　C いろいろな曲線

略解

1 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　$\alpha = 40^\circ,\quad \beta = 160^\circ$

2 (1)　最大値：$\sqrt{t + 2\sqrt{t} + 2}$

最小値：$\begin{cases} \sqrt{t - 2\sqrt{t} + 2} & (0 \leqq t \leqq 1) \\ 1 & (1 \leqq t \leqq 4) \end{cases}$

(2)

$$S(t) = \begin{cases} 4\pi\sqrt{t} & (0 \leqq t \leqq 1) \\ \pi(t + 2\sqrt{t} + 1) & (1 \leqq t \leqq 4) \end{cases}$$

(3)　$\dfrac{45}{2}\pi$

3 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　$f(x) = x + 1,\quad g(x) = xe^x$

4 (1)　証明は省略

(2)　$a_{n+1} = 5a_n + 2b_n,\quad b_{n+1} = a_n + 5b_n$

(3)　$(p,\, q) = \left(\sqrt{2},\ 5 + \sqrt{2}\right),\quad \left(-\sqrt{2},\ 5 - \sqrt{2}\right)$

(4)　$a_n = \dfrac{1}{2}\left\{\left(5 + \sqrt{2}\right)^n + \left(5 - \sqrt{2}\right)^n\right\},\quad b_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\left(5 + \sqrt{2}\right)^n - \left(5 - \sqrt{2}\right)^n\right\}$

5 (1)　$\mathrm{P_1Q_1} = \sqrt{4a^2 - 12a + 10}$

(2)

$$A = \begin{cases} (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (n \text{ が偶数のとき}) \\[2ex] (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(3)　$2^{\frac{n-1}{2}}$

6 (1)

$$f(a) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{a^2}{3} - 1} & \left(a \leqq -\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \leqq a\right) \\[2ex] \left|a + \sqrt{2}\right| & \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \leqq a \leqq 0\right) \\[2ex] \left|a - \sqrt{2}\right| & \left(0 \leqq a \leqq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

(2)　求める曲線は，下図のようになる．