◀2008 年　筑波大学（前期）▶

1　$p,\ q$ を正の実数とする．x の方程式

$$\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx)+1=0$$

が 1 より大きい解をもつとき，点 $(\log_{10}p,\ \log_{10}q)$ の存在する範囲を座標平面上に図示せよ．

2　xyz 空間内の点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1)$ と，xy 平面上の円 $C : x^2+(y-2)^2=1$ に属する点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ 0)$ を考える．

(1)　直線 PQ と平面 $z=t$ の交点の座標を $(\alpha,\ \beta,\ t)$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ を t と θ で表せ．

(2)　線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面と平面 $z=0,\ z=1$ によって囲まれる立体の体積を θ で表せ．

(3)　Q が C 上を一周するとき，(2) で求めた体積の最大値，最小値を求めよ．

3　e は自然対数の底とする．$t>e$ において関数 $f(t),\ g(t)$ を次のように定める．

$$f(t)=\int_1^e \frac{t^2\log x}{t-x}\,dx,\quad g(t)=\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}\,dx$$

(1)　$f(t)-g(t)$ を t の 1 次式で表せ．

(2)　$1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき $\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e}$ が成り立つことを用いて，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=0$ を示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)=0$ となる定数 $a,\ b$ を求めよ．

4　二つの数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ を次の漸化式によって定める．

$$a_1=3,\ b_1=1$$
$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(3a_n+5b_n)$$
$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+3b_n)$$

(1)　すべての自然数 n について，${a_n}^2-5{b_n}^2=4$ であることを示せ．

(2)　すべての自然数 n について，$a_n,\ b_n$ は自然数かつ a_n+b_n は偶数であることを証明せよ．

5　行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$P=\begin{pmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}$ とする．$AP=PD$ が成り立つとき，$a,\ x,\ y$ を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(2)　$(A+tE)^n=4E$ が成り立つような実数 t と自然数 n の組をすべて求めよ．ただし，$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とする．

6　放物線 $C : y=x^2$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2),\ \mathrm{Q}(s,\ s^2)\ (s<t)$ における接線の交点を $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とする．

(1)　$X,\ Y$ を $t,\ s$ を用いて表せ．

(2)　点 P, Q が $\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{4}$ を満たしながら C 上を動くとき，点 R は双曲線上を動くことを示し，かつ，その双曲線の方程式を求めよ．

出題範囲と難易度

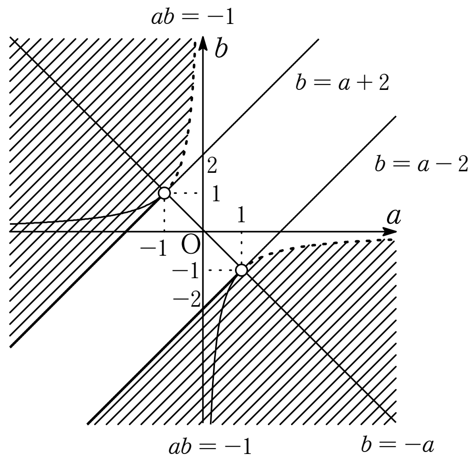
1 標準 II 図形と方程式・対数関数
2 標準 III 積分法の応用
3 標準 III 関数の極限・積分法の応用
4 標準 B 数列
5 標準 C 行列
6 標準 C いろいろな曲線

略解

1

$$\begin{cases} b \geqq -a \\ ab < -1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} b < -a \\ b \leqq a-2 \text{ または } b \geqq a+2 \end{cases}$$

求める領域は，下図の斜線部分で境界は，実線部分を含み，点線部分および白丸は含まない．



2 (1) $\alpha^2+\beta^2=2(3+2\sin\theta-\cos\theta)t^2-2(5+4\sin\theta-\cos\theta)t+4\sin\theta+5$

(2) $\dfrac{\pi}{3}(4\sin\theta+\cos\theta+6)$

(3) 最大値 $\dfrac{6+\sqrt{17}}{3}\pi$，　最小値 $\dfrac{6-\sqrt{17}}{3}\pi$

3 (1) $f(t)-g(t)=t+\dfrac{e^2+1}{4}$

(2) 証明は省略

(3) $a=\dfrac{e^2+1}{4}$，　$b=1$

4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

5 (1) $a=1$，　$x=-1$，　$y=3$

(2) $t=-1$，　$n=2$

6 (1) $X=\dfrac{s+t}{2}$，　$Y=st$

(2) 証明は省略．$x^2-\left(y+\dfrac{3}{4}\right)^2=-\dfrac{1}{2}$　$\left(y<-\dfrac{1}{4}\right)$