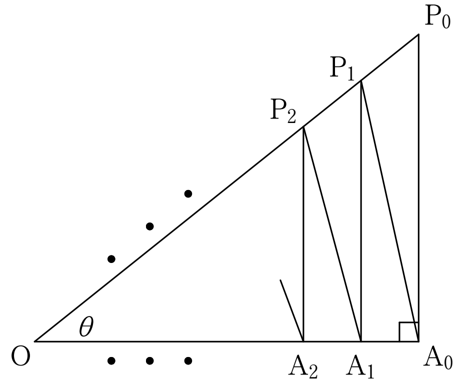
# ◀1998 年　筑波大学（前期）▶

**1**　直角三角形 $A_0P_0O$ の斜辺 $OP_0$ 上に点の列 $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ を，辺 $OA_0$ 上に点の列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ を，それぞれ次のように定める．まず，$OP_1 = OA_0$ とする．次に点 $P_1$ から $OA_0$ におろした垂線の足を $A_1$ とする．次に $OP_2 = OA_1$ とし，点 $P_2$ から $OA_0$ におろした垂線の足を $A_2$ とする．以下，この操作をくり返す．$\angle P_0OA_0 = \theta$, $OA_0 = a$ とし，$\triangle A_{n-1}P_{n-1}P_n$ の面積を $S_n$ とする．$S(\theta) = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$ とするとき，次の問いに答えよ．




(1)　$S_1$ を $a$ と $\theta$ で表せ．

(2)　$S(\theta)$ を $a$ と $\theta$ で表せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ．

**2**　関数 $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ $(x>0)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2)　$y = f(x)$ のグラフの $1 \leqq x \leqq 2$ に対応する部分，2 直線 $y = f(1)$, $y = f(2)$，および $y$ 軸で囲まれた部分を，$y$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

**3**　関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x+1}\frac{1}{t^2+1}\,dt$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$f(x) = 0$ となる $x$ を求めよ．

(2)　$f'(x) = 0$ となる $x$ を求めよ．

(3)　$f(x)$ の最大値を求めよ．

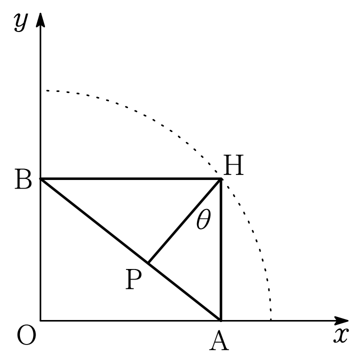
**4**　行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ をみたす $a, b, c, d$ を求めよ．

(2)　$A^3$ は $\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q & 0\\ 0 & r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の形には表せないことを示せ．

(3)　$A^4, A^5, A^6, \cdots, A^{15}$ の中で $\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q & 0\\ 0 & r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の形に表せないものを求めよ．

**5**　$xy$ 平面の第 1 象限内の点 H が原点 O を中心とする半径 $a$ の円周上にある．点 H から $x$ 軸，$y$ 軸におろした垂線の足をそれぞれ A, B とし，さらに点 H から線分 AB におろした垂線の足を P とする．線分 HP の長さを $l$, $\angle AHP = \theta$ とするとき，次の問いに答えよ．




(1)　$l$ を $a$ と $\theta$ で表せ．

(2)　点 $P(x, y)$ の座標 $(x, y)$ を $a$ と $\theta$ で表せ．

(3)　点 H が円周上を動くとき，線分 OP の長さの最小値を求めよ．

**6**　ある会社で製造しているパッケージ入り食料品の正味重量は，母平均 104.0g，母標準偏差 2.0g の正規分布に従うと考えられる．正規分布表（省略）を用いて，次の問いに答えよ．

(1)　あるパッケージの正味重量が 100.0g 以下になる確率を求めよ．

(2)　4 個のパッケージを無作為に取り出したとき，その正味重量の平均が 101.0g 以下になる確率を求めよ．

(3)　製造工程の変更を行い，81 個のパッケージを無作為に取り出しその正味重量を調べたところ，平均 110.0 g，標準偏差 1.8g であった．このとき，1 パッケージ当りの平均正味重量を信頼度 95% で推定せよ．ただし，製造工程変更後も正味重量は正規分布に従うものとする．

**7**　連続関数 $f(x)$ と定数 $a, b, d$ $(a<b,\ d>0)$ が与えられている．$f(a)>0,\ f(b)<0$ であるとき，方程式 $f(x)=0$ の近似解を以下の方法で求める．

1.　$a_0=a,\ b_0=b$ とおく．

2.　$i=0, 1, 2, \cdots$ に対して次の反復を行う．

　　2 点 $(a_i,\ f(a_i)),\ (b_i,\ f(b_i))$ を結ぶ直線と $x$ 軸との交点の $x$ 座標を $c_{i+1}$ とする．

　　$|f(c_{i+1})|<d$ ならば計算を停止し，$c_{i+1}$ を近似解とする．そうでないときは，

$$f(c_{i+1})<0 \quad ならば \quad a_{i+1}=a_i,\ b_{i+1}=c_{i+1},$$
$$f(c_{i+1})>0 \quad ならば \quad a_{i+1}=c_{i+1},\ b_{i+1}=b_i \ とおく．$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$c_{i+1}$ を $a_i$ と $b_i$ で表せ．

(2)　上の方法で方程式 $-4x^3+16x^2-19x+6=0$ の $0\leqq x\leqq 3$ の範囲にある一つの解の近似値を計算するプログラムをかけ．ただし，$d=0.00001$ とし，100 回以内の反復で近似解が求められなければ $c_{100}$ を近似解として出力するものとする．

(3)　$f(x)=-x^2+2,\ a=0,\ b=2$ とするとき，$c_{i+1}$ を $c_i$ で表し，$c_1, c_2, c_3, c_4$ を小数点以下第 3 位まで求めよ．

**8**　座標空間内の 8 点

A$(1, -1, 0)$,　B$(1, 1, 0)$,　C$(-1, 1, 0)$,　D$(-1, -1, 0)$,

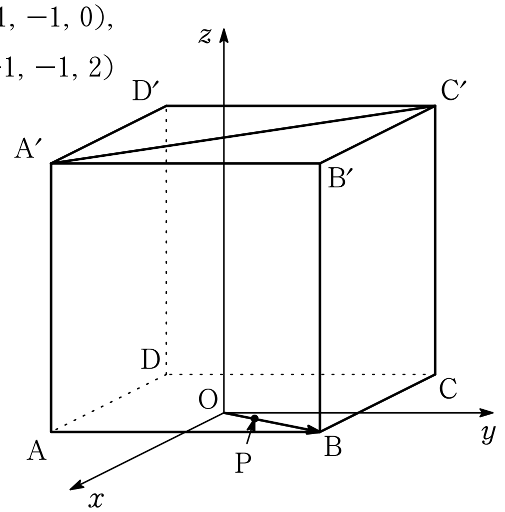
A′$(1, -1, 2)$,　B′$(1, 1, 2)$,　C′$(-1, 1, 2)$,　D′$(-1, -1, 2)$

を頂点とする立方体がある．

$xy$ 平面上の点 P$(p, p, 0)$ と直線 A′C′ を含む平面でこの立方体を切り，その切り口の面積を $S(p)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$0\leqq p\leqq 1$ とする．

(1)　$S(p)$ を求めよ．

(2)　$p$ が上の範囲を動くとき，$S(p)$ の最大値を求めよ．



## 出題範囲と難易度

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 標準 | III | 関数の極限 |
| 2 | 基本 | III | 微分法の応用・積分法の応用 |
| 3 | 標準 | III | 積分法 |
| 4 | 標準 | C | 行列 |
| 5 | 標準 | II | 三角関数 |
| 6 | 標準 | C | 正規分布 |
| 7 | 標準 | C | 方程式の近似解 |
| 8 | 標準 | B | 空間座標 |

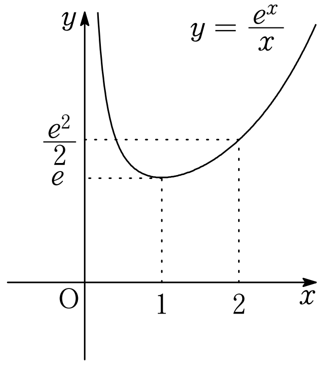
# 略解

**1** (1) $S_1=\dfrac{1}{2}a^2(\tan\theta-\sin\theta)$

(2) $S(\theta)=\dfrac{1}{2}a^2\cdot\dfrac{\tan\theta}{1+\cos\theta}$

(3) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{\theta}=\dfrac{a^2}{4}$

**2** (1) グラフは右図.




(2) $\pi e$

**3** (1) $x=-1$

(2) $x=-2,\ 0$

(3) $\dfrac{\pi}{4}$

**4** (1) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ d=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) 証明は省略

(3) $A^9,\ A^{15}$

**5** (1) $l=a\sin\theta\cos\theta$

(2) $(x,\ y)=(a\cos^3\theta,\ a\sin^3\theta)$

(3) $\dfrac{a}{2}$

**6** (1) 0.0228

(2) 0.00135

(3) 109.6g と 110.4g の間

**7** (1) $c_{i+1}=\dfrac{b_if(a_i)-a_if(b_i)}{f(a_i)-f(b_i)}$

(2)
```
10   A=0:B=3
20   DEF FNF(X)=-4*X^3+16*X^2-19*X+6
30   FOR I=1 TO 100
40       C=(B*FNF(A)-A*FNF(B))/(FNF(A)-FNF(B))
50       IF ABS(FNF(C))<0.00001 THEN GOTO 90
60       IF FNF(C)<0 THEN B=C
70       IF FNF(C)>0 THEN A=C
80   NEXT I
90   PRINT C
100  END
```

(3) $c_{i+1}=\dfrac{2c_i+2}{c_i+2}\ (i\geqq 1)$

$c_1=1,\ c_2\fallingdotseq 1.333,\ c_3=1.4,\ c_4\fallingdotseq 1.412$

**8** (1) $S(p)=2(2-p)\sqrt{p^2+2}$

(2) $4\sqrt{2}\ (p=0)$