◀2014 年　東京工業大学（前期）▶

1　3 以上の奇数 n に対して，a_n と b_n を次のように定める．

$$a_n = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1),\quad b_n = \frac{n^2-1}{8}$$

(1)　a_n と b_n はどちらも整数であることを示せ．

(2)　$a_n - b_n$ は 4 の倍数であることを示せ．

2　$a > 1$ とし，次の不等式を考える．

$$(*)\quad \frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1)　$a = 2$ のとき，すべての $t > 0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つことを示せ．

(2)　すべての $t > 0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

3　1 個のさいころを投げて，出た目が 1 か 2 であれば行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を，出た目が 3 か 4 であれば行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を，出た目が 5 か 6 であれば行列 $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ．そして，選んだ行列の表す 1 次変換によって xy 平面上の点 R を移すという操作を行う．点 R は最初は点 $(0, 1)$ にあるものとし，さいころを投げて点 R を移す操作を n 回続けて行ったときに点 R が点 $(0, 1)$ にある確率を p_n，点 $(0, -1)$ にある確率を q_n とする．

(1)　$p_1,\ p_2$ と $q_1,\ q_2$ を求めよ．

(2)　$p_n + q_n$ と $p_{n-1} + q_{n-1}$ の関係式を求めよ．また，$p_n - q_n$ と $p_{n-1} - q_{n-1}$ の関係式を求めよ．

(3)　p_n を n を用いて表せ．

4　点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ が $s = \sqrt{2}t^2 - 2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする．さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする．

(1)　点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ．

(2)　直線 $y = a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ．

(3)　図形 D を y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ．

5　xy 平面上の曲線 $C : y = x^3 + x^2 + 1$ を考え，C 上の点 $(1,\ 3)$ を P_0 とする．$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$ とする．このとき，P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする．

(1)　S_1 を求めよ．

(2)　x_k を k を用いて表せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$ を求めよ．

出題範囲と難易度

1 標準　A 整数問題・B 数列

2 標準　III 微分法の応用

3 標準　A 確率・B 数列・C 行列・１次変換

4 標準　III 積分法の応用・C １次変換

5 標準　III 数列の極限・積分法の応用

略解

1 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

2 (1) 証明は省略

(2) $a \geqq 2$

3 (1) $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $q_1 = 0$, $q_2 = \frac{2}{9}$

(2) $p_n + q_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(p_{n-1} + q_{n-1})$

$p_n - q_n = \frac{1}{3}(p_{n-1} - q_{n-1})$

(3) $p_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

4 (1) $\mathrm{Q}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t - t^2, t^2 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

(2) $a = -\frac{1}{8}$

(3) $V = \frac{11}{120}\pi$

5 (1) $S_1 = \frac{64}{3}$

(2) $x_k = \frac{(-2)^{k+2} - 1}{3}$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{S_k} = \frac{1}{20}$