◀2013 年　東京工業大学（前期）▶

1

(1)　2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 $\alpha,\ \beta$ に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の整数倍になることを示せ．

(2)　6 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ．

2　2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\Delta(A)=ad-bc$，$t(A)=a+d$ と定める．

(1)　2 次の正方行列 $A,\ B$ に対して，$\Delta(AB)=\Delta(A)\Delta(B)$ が成り立つことを示せ．

(2)　A の成分がすべて実数で，$A^5=E$ が成り立つとき，$x=\Delta(A)$ と $y=t(A)$ の値を求めよ．ただし，E は 2 次の単位行列とする．

3　k を定数とするとき，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数を求めよ．

4　正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

5　$a,\ b$ を正の実数とし，円 $C_1:(x-a)^2+y^2=a^2$ と楕円 $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える．

(1)　C_1 が C_2 に内接するための $a,\ b$ の条件を求めよ．

(2)　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とし，C_1 が C_2 に内接しているとする．このとき，第 1 象限における C_1 と C_2 の接点の座標 $(p,\ q)$ を求めよ．

(3)　(2) の条件のもとで，$x \geqq p$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

出題範囲と難易度

1　標準　$\boxed{\text{A}}$ 整数問題・確率・$\boxed{\text{B}}$ 数列

2　標準　$\boxed{\text{C}}$ 行列

3　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用

4　やや難　$\boxed{\text{II}}$ 三角関数・$\boxed{\text{III}}$ 関数の極限

5　やや難　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用・$\boxed{\text{C}}$ いろいろな曲線

略解

1 (1) 証明は省略

(2) $\dfrac{325}{648}$

2 (1) 証明は省略

(2) $(x,\ y) = (1,\ 2),\ \left(1,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(1,\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

3

$$\begin{cases} k < 0 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ k = 0,\ e-1 < k \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ 0 < k \leqq 1,\ k = e-1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 1 < k < e-1 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

4 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{8}$

5 (1)

$$\begin{cases} 0 < b < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ かつ } a = b\sqrt{1-b^2} \\ b \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ かつ } a = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(2) $(p,\ q) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$

(3) $\dfrac{9\sqrt{3}-8}{108}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{9}$