◀2011 年　東京工業大学（前期）▶

1　n を自然数とする．xy 平面上で行列 $\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換（移動ともいう）を f_n とする．次の問いに答えよ．

(1)　原点 O(0, 0) を通る直線で，その直線上のすべての点が f_n により同じ直線上に移されるものが 2 本あることを示し，この 2 直線の方程式を求めよ．

(2)　(1) で得られた 2 直線と曲線 $y=x^2$ によって囲まれる図形の面積 S_n を求めよ．

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n - \frac{1}{6}}$ を求めよ．

2　実数 x に対して

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - x\sin 2t|\,dt$$

とおく．

(1)　関数 $f(x)$ の最小値を求めよ．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ．

3　定数 k は $k>1$ をみたすとする．xy 平面上の点 A(1, 0) を通り x 軸に垂直な直線の第 1 象限に含まれる部分を，2 点 X, Y が AY $=k$AX をみたしながら動いている．原点 O(0, 0) を中心とする半径 1 の円と線分 OX, OY が交わる点をそれぞれ P, Q とするとき，△OPQ の面積の最大値を k を用いて表せ．

4　平面上に一辺の長さが 1 の正方形 D および D と交わる直線があるとする．この直線を軸に D を回転して得られる回転体について以下の問いに答えよ．

(1)　D と同じ平面上の直線 ℓ は D のどの辺にも平行でないものとする．軸とする直線は ℓ と平行なものの中で考えるとき，回転体の体積を最大にする直線は D と唯 1 点で交わることを示せ．

(2)　D と交わる直線を軸としてできるすべての回転体の体積の中で最大となる値を求めよ．

出題範囲と難易度

1　|標準|　III 極限・積分法の応用・C 行列・1 次変換

2　|標準|　III 積分法の応用

3　|標準|　III 微分法の応用

4　|難|　III 積分法の応用

略解

1 (1) 証明は省略. $y = nx$,　$y = (n+1)x$

(2) $S_n = \frac{1}{6}(3n^2 + 3n + 1)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n - \frac{1}{6}} = 2$

2 (1) $\sqrt{2} - 1$　$\left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(2) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log 2$

3 $\frac{k-1}{2(k+1)}$

4 (1) 証明は省略

(2) $\sqrt{2}\pi$