

## ◀2009年 東京工業大学(前期)▶

**1** 点  $P$  から放物線  $y = \frac{1}{2}x^2$  へ 2 本の接線が引けるとき, 2 つの接点を  $A, B$  とし, 線分  $PA, PB$  およびこの放物線で囲まれる図形の面積を  $S$  とする.  $PA, PB$  が直交するときの  $S$  の最小値を求めよ.

**2** 実数  $a$  に対し, 次の 1 次変換

$$f(x, y) = (ax + (a-2)y, (a-2)x + ay)$$

を考える. 以下の 2 条件をみたす直線  $L$  が存在するような  $a$  を求めよ.

- (1)  $L$  は点  $(0, 1)$  を通る.
- (2) 点  $Q$  が  $L$  上にあれば, その  $f$  による像  $f(Q)$  も  $L$  上にある.

**3**  $N$  を正の整数とする.  $2N$  以下の正の整数  $m, n$  からなる組  $(m, n)$  で, 方程式  $x^2 - nx + m = 0$  が  $N$  以上の実数解をもつようなものは何組あるか.

**4**  $xyz$  空間の原点と点  $(1, 1, 1)$  を通る直線を  $l$  とする.

- (1)  $l$  上の点  $\left(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}\right)$  を通り  $l$  と垂直な平面が,  $xy$  平面と交わってできる直線の方程式を求めよ.
- (2) 不等式  $0 \leq y \leq x(1-x)$  の表す  $xy$  平面内の領域を  $D$  とする.  $l$  を軸として  $D$  を回転させて得られる回転体の体積を求めよ.

## 出題範囲と難易度

- |          |    |                              |        |
|----------|----|------------------------------|--------|
| <b>1</b> | 標準 | <input type="checkbox"/> II  | 微分積分   |
| <b>2</b> | 標準 | <input type="checkbox"/> C   | 1 次変換  |
| <b>3</b> | 標準 | <input type="checkbox"/> I   | 整数問題   |
| <b>4</b> | 難  | <input type="checkbox"/> III | 積分法の応用 |

**略解****1**

$$\frac{1}{3}$$

**2**

$$a = \frac{3}{2}, 2$$

**3**

$$2N^2 - N \text{ (個)}$$

**4**

(1)  $y = -x + t$

(2)  $\frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$