# ◀1998 年　東京工業大学（前期）▶

**1**　$a>0$ とし，$x,\,y$ が 4 つの不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+3y \leqq 12,\ ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y \leqq 8$ を同時にみたしているとする．このとき $x+y$ の最大値 $f(a)$ を求めよ．

**2**　$R$ を隣りあう 2 辺の長さ $a,\,b$ が $2a>b>a$ をみたす長方形とし，$A$ を次の性質（P）を持つ半径 $x$ の円とする．

（P）　$R$ の内部にあって隣りあう 2 辺にだけ接する．

(1)　性質（P）を持つ円で円 $A$ に外接するものが 4 つ存在するために，円 $A$ の半径 $x$ がみたすべき条件を $a,\,b$ を使って表せ．

(2)　$x$ が (1) の条件をみたすとき，円 $A$ に外接する 4 つの円のうち 2 番目に大きい円を $B$ とする．$x$ が変化するとき円 $A$ と円 $B$ の面積の和の最小値を求めよ．

**3**

(1)　$f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ とし，$t$ を実数とする．すべての自然数 $n$ に対し実数 $f_n(t)$ が $f_n(t)=f(f_{n-1}(t))$，$n=1,\,2,\,3,\,\cdots$，ただし，$f_0(t)=t$ によって帰納的に定義できるための $t$ の条件を求めよ．

(2)　$a \geqq 1$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \int_a^{a+\frac{1}{n}} (f_n(t)-1)\,dt$ を求めよ．

**4**　楕円 $C$ : $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$ 上に点 $\mathrm{A}(a,\,0)$ をとる．$C$ 上の点 $\mathrm{B}(p,\,q)\ (q>0)$ における接線 $l$ と線分 BA のなす角が，$l$ と直線 $x=p$ のなす角に等しいとする．ただし，2 直線のなす角は鋭角の方をとることにする．

(1)　座標 $p$ を $a$ で表せ．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{a\to 1} p$ および $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{p}{a}$ を求めよ．

## 出題範囲と難易度

**1**　標準　II 図形と方程式

**2**　やや難　II 微分積分

**3**　標準　III 積分法

**4**　やや難　III 関数の極限・C いろいろな曲線

# 略解

**1**

$$f(a)=\begin{cases} 6 & \left(0<a\leqq\dfrac{4}{3}\right) \\ \dfrac{8}{a} & \left(\dfrac{4}{3}<a\leqq\dfrac{8}{5}\right) \\ 5 & \left(\dfrac{8}{5}<a\right) \end{cases}$$

**2** (1)　$\dfrac{a}{2}+b-\sqrt{2ab}<x<\dfrac{a}{2}$

(2)　$\dfrac{b^2}{8}\pi$

**3** (1)　$t\neq\dfrac{k-1}{k}$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$a=1$ のとき，$1-\log 2$，　$a>1$ のとき，$1$

**4** (1)　$p=\dfrac{a(1-\sqrt{a^4-a^2+1})}{a^2-1}$

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to1}p=-\frac{1}{2}$，　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{p}{a}=-1$