◀1995 年　東京工業大学（前期）▶

1　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して数列

$$a(n)=\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{n!}$$

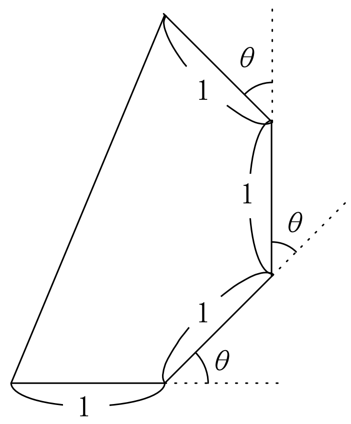
を考える．

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a(n)$ を求めよ．

(2)　$a(n)$ が整数となる n をすべて求めよ．

(3)　積 $a(1)a(2)\cdots\cdots a(n)$ が整数となる n をすべて求めよ．

2　右図のような 4 辺の長さ 1 で，それらのなす外角が θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるような五角形の面積の最大値を求めよ．



3　n を自然数とする．

(1)　$f(x)=\dfrac{x^2}{n^2}+e^{2x}-1$ の増減を調べ，グラフの概形を描け．

(2)　だ円 $\dfrac{x^2}{n^2}+n^2y^2=1$ と曲線 $y=\dfrac{1}{n}e^x$ の交点のうち $\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right)$ でない方の座標を $(x_n,\ y_n)$ とおく．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=-1$ であることを示せ．

4　1 から n までの数字を書いたカードが 1 枚ずつある．ただし，$n\geqq 3$ とする．

(1)　この n 枚のカードから無作為に同時に 2 枚のカードを取り出すとき，書かれた数の積の期待値 E を n で表せ．

(2)　この n 枚のカードから無作為に同時に 3 枚のカードを取り出すとき，書かれた数の積の期待値を $E(n)$ で表す．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^3}$ を求めよ．

出題範囲と難易度

1　標準　I　整数問題

2　標準　微積　微分法の応用

3　標準　微積　関数の極限・微分法の応用

4　やや難　確統　確率・微積　数列の極限

略解

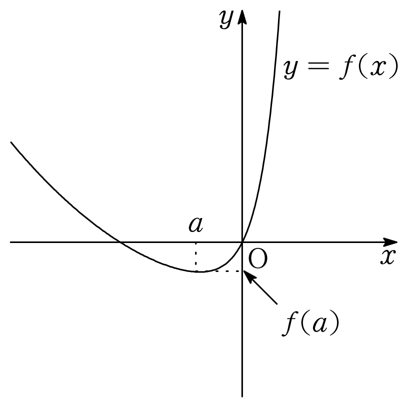
1 (1) $\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$

(2) $n = 1, 2, 3, 4, 6$

(3) $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

2 $\sqrt{2}+1 \quad \left(\theta = \dfrac{\pi}{4}\right)$

3 (1) グラフは右図のようになる．



(2) 証明は省略

4 (1) $E = \dfrac{1}{12}(n+1)(3n+2)$

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{E(n)}{n^3} = \dfrac{1}{8}$