◀2017 年　東京大学（前期）▶

♠ 理　科

1　実数 a, b に対して

$$f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$$

とし，$0<\theta<\pi$ で定義された関数

$$g(\theta)=\frac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$$

を考える．

(1)　$f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x=\cos\theta$ の整式で表せ．

(2)　$g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a, b についての条件を求めよ．また，条件をみたす点 (a, b) が描く図形を座標平面上に図示せよ．

2　座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という．格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える．

(a)　最初に，点 P は原点 O にある．

(b)　ある時刻で点 P が格子点 (m, n) にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1, n), (m, n+1), (m-1, n), (m, n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

(1)　点 P が最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ．

(2)　点 P が最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ．

3　複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする．

(1)　α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする．点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる．この円の中心と半径を求めよ．

(2)　1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする．点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ．

4　$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して

$$a_n=p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める．以下の問いに答えよ．ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい．

(1)　a_1, a_2の値を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$ とする．積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ．

(3)　a_n は自然数であることを示せ．

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

5　k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C, D の共通接線について考える．

$$C \ : \ y=x^2+k$$

$$D \ : \ x=y^2+k$$

(1)　直線 $y=ax+b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ．ただし $a \neq -1$ とする．

(2)　傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める．このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ．

6　点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす．また，点 A(1, 0, 0) に対して，$\angle$AOP を θ とおく．ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1)　点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

♠ 文　科

1　座標平面において 2 つの放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を考える．ただし s, t は実数で，$0<s$, $0<t<1$ をみたすとする．放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする．A と B がただ 1 点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ．

2　1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている．点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ．

3　座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という．格子点上を次の規則 (a), (b) に従って動く点 P を考える．

(a)　最初に，点 P は原点 O にある．

(b)　ある時刻で点 P が格子点 (m, n) にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1, n)$, $(m, n+1)$, $(m-1, n)$, $(m, n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

(1)　最初から 1 秒後の点 P の座標を (s, t) とする．$t-s=-1$ となる確率を求めよ．

(2)　点 P が最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ．

4　理科 **4** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理　科

1　|分析中|　I 2次関数・II 三角関数

2　|分析中|　A 確率

3　|分析中|　III 複素数平面

4　|分析中|　A 整数の性質・B 数列

5　|分析中|　II 微分積分

6　|分析中|　B 空間図形・III 積分法の応用

♣ 文　科

1　|分析中|　I 2次関数・II 微分積分

2　|分析中|　B ベクトル

3　|分析中|　A 確率

4　|分析中|　A 整数の性質・B 数列

注: 出題範囲は分析中のため変更される場合があります．