◀2016 年　東京大学（前期）▶

♠ 理　科

1　e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする．すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

2　A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する．以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する．

（a）　1 試合目で A と B が対戦する．

（b）　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する．

（c）　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する．ここで k は 2 以上の整数とする．

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．

(1)　n を 2 以上の整数とする．ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ．

(2)　m を正の整数とする．総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ．

3　a を $1<a<3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $P_1(1,\,0,\,1)$, $P_2(1,\,1,\,1)$, $P_3(1,\,0,\,3)$, $Q(0,\,0,\,a)$ を考える．直線 P_1Q, P_2Q, P_3Q と xy 平面の交点をそれぞれ R_1, R_2, R_3 として，三角形 $R_1R_2R_3$ の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ．

4　z を複素数とする．複素数平面上の 3 点 $A(1)$, $B(z)$, $C(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ．

5　k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる．ここで，a_1, a_2, $\cdots$, a_k は 0 から 9 までの整数で，$a_k\neq 0$ とする．

(1)　次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ．

$$0.a_1a_2\cdots a_k\leqq\sqrt{n}-10^k<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2)　p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ．

$$0.a_1a_2\cdots a_k\leqq\sqrt{m}-p<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3)　実数 x に対し，$r\leqq x<r+1$ をみたす整数 r を $[\,x\,]$ で表す．$\sqrt{s}-[\,\sqrt{s}\,]=0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ．

6　座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a), (b) をみたしながら動く．

（a）　点 A は平面 $z=0$ 上にある．

（b）　点 $C(0,\,0,\,1)$ が線分 AB 上にある．

このとき，線分 AB が通過することのできる範囲を K とする．K と不等式 $z\geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ．

♠ 文　科

1　座標平面上の 3 点 $P(x, y)$, $Q(-x, -y)$, $R(1, 0)$ が鋭角三角形をなすための (x, y) についての条件を求めよ．また，その条件をみたす点 $P(x, y)$ の範囲を図示せよ．

2　A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する．以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する．

（a）　1 試合目で A と B が対戦する．

（b）　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する．

（c）　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する．ここで k は 2 以上の整数とする．

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．

(1)　ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ．

(2)　n を 2 以上の整数とする．ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ．

(3)　m を正の整数とする．総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ．

3　座標平面上の 2 つの放物線

$$A \ : \ y = x^2$$

$$B \ : \ y = -x^2 + px + q$$

が点 $(-1, 1)$ で接している．ここで，p と q は実数である．さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする．

(1)　p と q の値を求めよ．

(2)　放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする．ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める．$S(t)$ を求めよ．

(3)　$t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ．

4　以下の問いに答えよ．ただし，(1) については，結論のみを書けばよい．

(1)　n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする．a_n を求めよ．

(2)　n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする．b_n を求めよ．

(3)　数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理　科

- **1** 標準　III 微分法の応用
- **2** 標準　A 確率
- **3** 基本　B ベクトル（空間）・III 微分法
- **4** 標準　III 複素数平面
- **5** やや難　A 整数の性質
- **6** やや難　B 空間図形・III 積分法の応用

♣ 文　科

- **1** 基本　II 図形と方程式
- **2** 標準　A 確率
- **3** 標準　II 微分積分
- **4** やや難　A 整数の性質・B 数列

略解

◇ 理　科

1　証明は省略

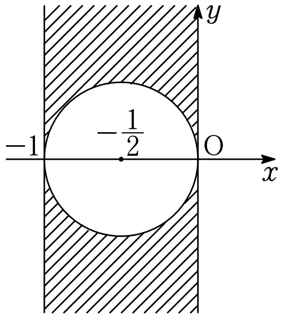
2　(1)　$\begin{cases} 0 & (n=3k \text{ のとき}) \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & (n=3k\pm 1 \text{ のとき}) \end{cases}$　（k は整数）

(2)　$\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^{m-1}}{5-12\left(\dfrac{1}{8}\right)^m}$

3　$a=2$ のとき，最小値 4

4　$\left|z+\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$ かつ $-1<\mathrm{Re}(z)<0$

点 z の存在範囲は右図斜線部分で境界線上の点を含まない．



5　(1)　$n=10^{2k}+2\cdot 10^k\left(\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\cdots\cdots+\dfrac{a_k}{10^k}\right)+1$

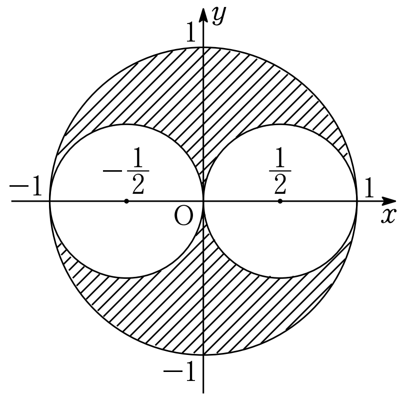
$n=10^{2k}+2\cdot 10^k\left(\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\cdots\cdots+\dfrac{a_k}{10^k}\right)+2$

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

6　$\pi\left(\dfrac{17}{3}-8\log 2\right)$

◇ 文　科



1

$$\begin{cases} x^2+y^2<1 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4} \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4} \end{cases}$$

求める範囲は右図斜線部分で境界線上の点を含まない．

2

(1) $\frac{1}{32}$

(2) $\begin{cases} 0 & (n=3k\ のとき) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & (n=3k\pm1\ のとき) \end{cases}$ （k は整数）

(3) $\frac{1}{14}\left\{5-12\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}$

3

(1) $p=-4,\ q=-2$

(2) $S(t)=\begin{cases} \frac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}} & \left(0<t<\frac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(t\geqq\frac{5}{2}\right) \end{cases}$

(3) $t=\frac{5}{4}$ のとき，最大値 $\frac{125}{24}$

4

(1) $a_n=\begin{cases} 3 & (n=4k-3) \\ 9 & (n=4k-2) \\ 7 & (n=4k-1) \\ 1 & (n=4k) \end{cases}$ （k は自然数）

(2) $b_n=\begin{cases} 3 & (n=2k-1) \\ 1 & (n=2k) \end{cases}$ （k は自然数）

(3) 7