◀2015年　東京大学（前期）▶

♠理　科

1　正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える．

$$C : y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ．

2　どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを 1 つ用意し，次のように左から順に文字を書く．

さいころを投げ，出た目が 1, 2, 3 のときは文字列 AA を書き，4 のときは文字 B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く．さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく．

たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に 2, 5, 6, 3, 4 であったとすると，得られる文字列は，

A A C D A A B

となる．このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である．

(1)　n を正の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ．

(2)　n を 2 以上の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ．

3　a を正の実数とし，p を正の有理数とする．

座標平面上の 2 つの曲線 $y = ax^p\ (x>0)$ と $y = \log x\ (x>0)$ を考える．この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする．

以下の問いに答えよ．必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてよい．

(1)　a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ．

(2)　この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ．

(3)　(2) で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ．

4　数列 $\{p_n\}$ を次のように定める．

$$p_1 = 1,\quad p_2 = 2,\quad p_{n+2} = \frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1)　$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ．

(2)　すべての $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ．

(3)　数列 $\{q_n\}$ を次のように定める．

$$q_1 = 1,\quad q_2 = 1,\quad q_{n+2} = q_{n+1}+q_n\quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

すべての $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$p_n = q_{2n-1}$ を示せ．

5　m を 2015 以下の正の整数とする．${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ．

6　n を正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $g(x)$ を次のように定める．

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x|\leqq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，$p,\ q$ を実数とする．$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ．

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)\,dx\leqq q$$

(2)　関数 $h(x)$ を次のように定める．

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

♠文　科

1　以下の命題 A, B それぞれに対し，その真偽を述べよ．また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ．

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100\geqq n^2$ が成り立つ．

命題 B　整数 $n,\ m,\ l$ が $5n+5m+3l=1$ をみたすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ．

2　座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ -1)$ を考える．また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする．次の条件 (i) または (ii) をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ．

(i)　頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A, P, B をすべて通るものがある．

(ii)　点 A, P, B は同一直線上にある．

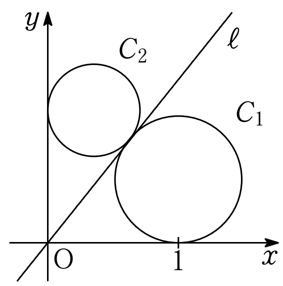
3　ℓ を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする．さらに，以下の 3 条件 (i), (ii), (iii) で定まる円 C_1, C_2 を考える．

(i)　円 C_1, C_2 は 2 つの不等式 $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ で定まる領域に含まれる．

(ii)　円 C_1, C_2 は直線 ℓ と同一点で接する．

(iii)　円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する．

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする．$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 ℓ の方程式と，その最小値を求めよ．



4　投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く．

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く．さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく．

たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，

A A B B A A B

となる．このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である．

(1)　n を正の整数とする．n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ．

(2)　n を 2 以上の整数とする．n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理　科

1 標準　II 図形と方程式

2 標準　A 確率・B 数列

3 標準　III 積分法の応用

4 標準　B 数列

5 やや難　I 整数の性質

6 やや難　III 関数の極限・積分法の応用

♣ 文　科

1 標準　I 命題と論証

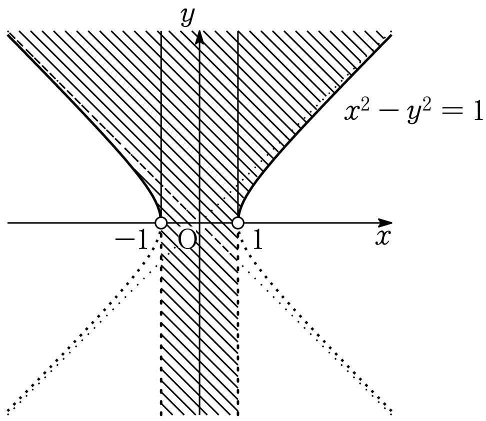
2 標準　II 図形と方程式

3 標準　II 図形と方程式

4 やや難　A 確率・B 数列

略解

◇ 理　科



1　右図斜線部分で境界は，$x^2-y^2=1,\ y>0$ の部分の点のみ含む

2　(1)　$\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$

(2)　$\dfrac{1}{18}-\dfrac{2}{9}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

3　(1)　$a=\dfrac{1}{pe}$，点 Q の x 座標：$e^{\frac{1}{p}}$

(2)　$2\pi\left(\dfrac{-2p+1}{2p+1}e^{\frac{1}{p}}+1\right)$

(3)　$p=\dfrac{1}{2}$

4　(1)　証明は省略

(2)　$p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n$

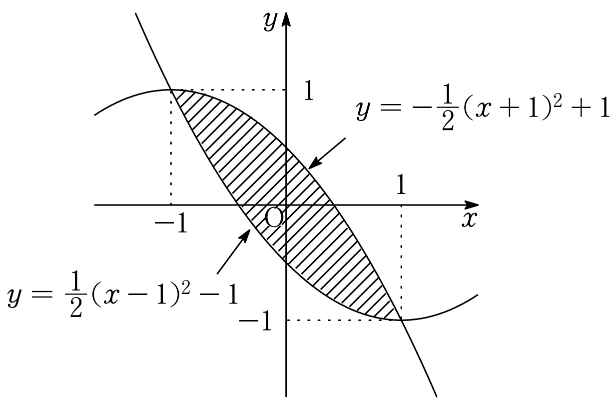
(3)　証明は省略

5　$m=32$

6　(1)　証明は省略

(2)　$-\dfrac{e}{1+e}$

◇ 文　科



1　命題 (A) ⋯ 偽：反例は $n=17$

命題 (B) ⋯ 真：証明は省略

2　右図斜線部分で，境界線上の点は含む.

面積：$\dfrac{4}{3}$

3　$\ell : y=\dfrac{4}{3}x$，　最小値：7

4　(1)　$\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$

(2)　$\dfrac{1}{6}-\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}$