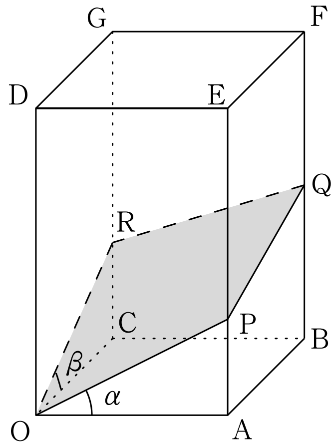
◀2014 年　東京大学（前期）▶

♠ 理　科



1　1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC − DEFG を考える．3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE，辺 BF，辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる．四角形 OPQR の面積を S とおく．また，∠AOP を α，∠COR を β とおく．

(1)　S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ．

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ．さらに，$\alpha \leqq \beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

2　a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする．
白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作 (*) を考える．

(*)　袋 U から球を 1 個取り出し，

（i）　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする．

（ii）　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする．

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする．この袋 U に対して操作 (*) を繰り返し行う．

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる．

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする．ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする．

(1)　p_1, p_2 を求めよ．

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} p_n$ を求めよ．

3　u を実数とする．座標平面上の 2 つの放物線

C_1：　$y=-x^2+1$

C_2：　$y=(x-u)^2+u$

を考える．C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a, b により，$a \leqq u \leqq b$ と表される．

(1)　a, b の値を求めよ．

(2)　u が $a \leqq u \leqq b$ をみたすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$ とする．ただし，共有点が 1 点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする．

$$2|x_1y_2-x_2y_1|$$

を u の式で表せ．

(3)　(2) で得られる u の式を $f(u)$ とする．定積分

$$I=\int_a^b f(u)\,du$$

を求めよ．

4　p, q は実数の定数で，$0 < p < 1$, $q > 0$ をみたすとする．関数

$$f(x) = (1-p)x + (1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える．

以下の問いに答えよ．必要であれば，不等式 $1 + x \leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい．

(1)　$0 < x < 1$ のとき，$0 < f(x) < 1$ であることを示せ．

(2)　x_0 は $0 < x_0 < 1$ をみたす実数とする．数列 $\{x_n\}$ の各項 x_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を，

$$x_n = f(x_{n-1})$$

によって順次定める．$p > q$ であるとき，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

となることを示せ．

(3)　$p < q$ であるとき，

$$c = f(c), \quad 0 < c < 1$$

をみたす実数 c が存在することを示せ．

5　r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする．ただし，0 を p で割った余りは 0 とする．

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致することを示せ．

(2)　$r = 2$, $p = 17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ．

(3)　ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする．このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ．

(4)　$a_2, a_3, a_4, \cdots$ に p で割り切れる数が現れないとする．このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ．

6　座標平面の原点を O で表す．

線分 $y = \sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y = -\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く．このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする．

(1)　s を $0 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ．

(2)　D を図示せよ．

♠文　科

1　以下の問いに答えよ．

(1)　t を実数の定数とする．実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

と定める．このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ．

(2)　(1) の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする．t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ．

2　a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする．
白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作 (*) を考える．

(*)　袋 U から球を 1 個取り出し，

　(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする．

　(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする．

　はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする．この袋 U に対して操作 (*) を繰り返し行う．

　たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる．

　n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする．ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする．

(1)　$p_1,\ p_2$ を求めよ．

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ．

3　座標平面の原点を O で表す．

　線分 $y=\sqrt{3}x\ (0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x\ (-3 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く．このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする．

(1)　s を $-3 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ．

(2)　D を図示せよ．

4　r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1=r,\quad a_2=r+1,\quad a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする．ただし，0 を p で割った余りは 0 とする．

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ．

(2)　$r=2,\ p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ．

(3)　ある 2 つの相異なる自然数 $n,\ m$ に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\quad b_{n+2}=b_{m+2}$$

　が成り立ったとする．このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理　科

1. |標準| $\boxed{\text{II}}$ 三角関数・$\boxed{\text{B}}$ 空間図形
2. |標準| $\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{III}}$ 数列の極限
3. |標準| $\boxed{\text{III}}$ 積分法
4. |難| $\boxed{\text{III}}$ 関数の極限・微分法の応用
5. |難| $\boxed{\text{I}}$ 整数問題・$\boxed{\text{A}}$ 論証
6. |やや難| $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式

♣ 文　科

1. |基本| $\boxed{\text{II}}$ 微分積分
2. |標準| $\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{III}}$ 数列の極限
3. |やや難| $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式
4. |やや難| $\boxed{\text{I}}$ 整数問題・$\boxed{\text{A}}$ 論証

略解

◇ 理　科

1 (1) $S=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$

(2) $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}$,　$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$

2 (1) $p_1=\dfrac{1}{a+3}$,　$p_2=\dfrac{a+2}{(a+3)(a+1)}$

(2) $p_n=\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}$　$(n\geqq 3)$

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n=\frac{1}{a+2}$

3 (1) $a=-1-\sqrt{3}$,　$b=-1+\sqrt{3}$

(2) $2|x_1y_2-x_2y_1|=(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}$

(3) $I=\dfrac{21}{8}\pi$

4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

5 (1) 証明は省略

(2) $b_1=2$,　$b_2=3$,　$b_3=9$,　$b_4=2$,　$b_5=3$

$b_6=9$,　$b_7=2$,　$b_8=3$,　$b_9=9$,　$b_{10}=2$

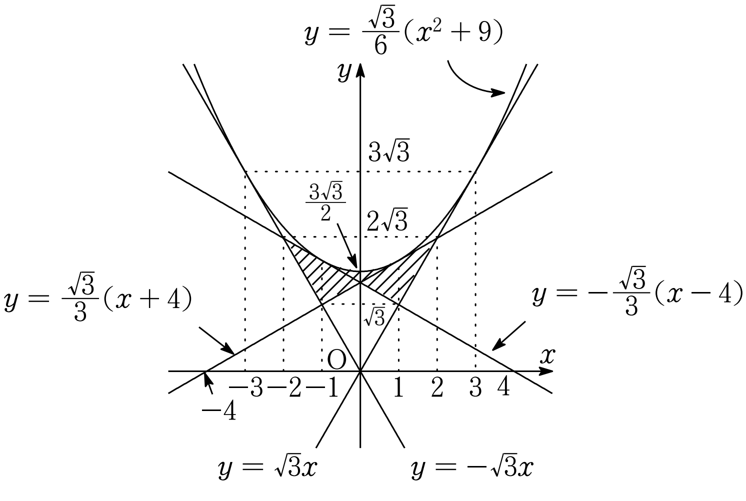
(3) 証明は省略

(4) 証明は省略

6 (1)

$$\begin{cases} 0\leqq s\leqq 1 \text{ のとき } & -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(s-4)\leqq t\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9) \\ 1<s\leqq 2 \text{ のとき } & \sqrt{3}s\leqq t\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}(s+4) \end{cases}$$

(2) 領域 D は下図斜線部分で境界線上の点を含む



◇ 文　科

1 (1)　$x=2t-3$ のとき，最大値 t^3-9t^2+15t

(2)　$t=5$ のとき，最小値 -25

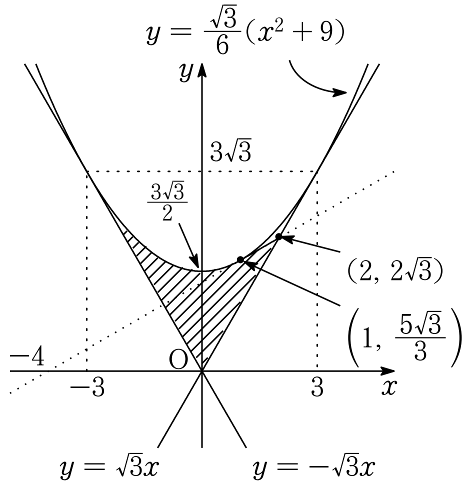
2 (1)　$p_1=\dfrac{1}{a+3}$，　$p_2=\dfrac{a+2}{(a+3)(a+1)}$

(2)　$p_n=\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}$　$(n\geqq 3)$

3 (1)

$$\begin{cases} -3\leqq s\leqq -1 \text{ のとき} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\leqq t\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9) \\ -1< s\leqq 1 \text{ のとき} & -\sqrt{3}s\leqq t\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9) \\ 1< s\leqq 2 \text{ のとき} & -\sqrt{3}s\leqq t\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

(2)　領域 D は下図斜線部分で境界線上の点を含む



4 (1)　証明は省略

(2)　$b_1=2,\quad b_2=3,\quad b_3=9,\quad b_4=2,\quad b_5=3$

$b_6=9,\quad b_7=2,\quad b_8=3,\quad b_9=9,\quad b_{10}=2$

(3)　証明は省略