◀2013 年　東京大学（前期）▶

♠ 理　科

1　実数 $a,\ b$ に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$$

$$(x_{n+1},\ y_{n+1})=(ax_n-by_n,\ bx_n+ay_n)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める．このとき，次の条件 (i), (ii) がともに成り立つような $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(i)　$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_6$

(ii)　$\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4,\ \mathrm{P}_5$ は相異なる．

2　a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x),\ g(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=\frac{\cos x}{x}$$

$$g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ．

3　A, B の 2 人がいる．投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている．次の操作を繰り返す．

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ．裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す．

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ．裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す．

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする．たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる．

(1)　A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ．

4　△ABC において $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\sqrt{3}$ とする．△ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|}=\vec{0}$$

を満たすとする．

(1)　$\angle\mathrm{APB},\ \angle\mathrm{APC}$ を求めよ．

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$ を求めよ．

5　次の命題 P を証明したい．

命題 P　次の条件 (a), (b) をともに満たす自然数（1 以上の整数）A が存在する．

(a)　A は連続する 3 つの自然数の積である．

(b)　A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある．

以下の問いに答えよ．

(1)　y を自然数とする．このとき不等式

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ．

(2)　命題 P を証明せよ．

6　座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$, $\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする．正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする．

(1)　$0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ．

(2)　V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ．

♠ 文　科

1　関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点 O を通る傾き t の直線を ℓ とし，C と ℓ が O 以外に共有点をもつとする．C と ℓ の共有点を O, P, Q とし，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ と $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ の積を $g(t)$ とおく．ただし，それら共有点の 1 つが接点である場合は，O, P, Q のうちの 2 つが一致して，その接点であるとする．関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

2　座標平面上の 3 点

$$\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2}),\quad \mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2}),\quad \mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})\quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

を考える．

(1)　2 つの線分の長さの差 $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ．

(2)　Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする．点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする．このとき，線分の長さの和

$$\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$$

は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ．

3　$a,\ b$ を実数の定数とする．実数 $x,\ y$ が

$$x^2+y^2 \leqq 25,\quad 2x+y \leqq 5$$

をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ．

4　A, B の 2 人がいる．投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている．次の操作を繰り返す．

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ．裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す．

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ．裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す．

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする．たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる．

A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理　科

1. 標準　B 数列
2. やや難　III 微分法の応用
3. やや難　A 確率・III 数列の極限
4. 標準　B ベクトル（平面）
5. 難　I 整数問題・A 論証
6. 難　III 積分法の応用

♣ 文　科

1. 標準　II 微分積分
2. やや難　II 図形と方程式
3. 標準　II 図形と方程式
4. やや難　A 確率

略解

◇ 理　科

1　$(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2　$a=-\dfrac{2}{5\pi},\quad \dfrac{2}{7\pi}<a<\dfrac{2}{3\pi}$

3　(1)　$\begin{cases} p(n)=\dfrac{n}{2^{n+1}} & (n\text{ が偶数}) \\ p(n)=\dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n\text{ が奇数}) \end{cases}$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p(n)=\dfrac{16}{27}$

4　(1)　$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{2}{3}\pi,\quad \angle\mathrm{APC}=\dfrac{2}{3}\pi$

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|=\dfrac{\sqrt{7}}{7},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=\dfrac{2\sqrt{7}}{7},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

5　(1)　$x>\dfrac{3y^2-1+\sqrt{9y^4+4y^3-6y^2-4y+1}}{2}$

(2)　証明は省略

6　(1)　$\dfrac{8}{3}\sqrt{2(1-t^2)}$

(2)　$\dfrac{32\sqrt{2}}{9}$

◇ 文　科

1

t	-1	$\cdots$	$\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\times$	$+$
$g(t)$		$\searrow$	$\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$	$\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

極大値：$\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}\ \left(t=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$，　極小値：$\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}\ \left(t=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$, $0\ (t=3)$

2　(1)　証明は省略．$\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}=2$

(2)　証明は省略．$\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=4+\sqrt{2}$

3

$$\begin{cases} a^2+b^2\leqq 25\text{ かつ }2a+b\leqq 5\text{ のとき} & -a^2-b^2 \\ a^2+b^2\geqq 25\text{ かつ「}a\leqq 0\text{ または }b\leqq -\dfrac{3}{4}a\text{」のとき} & 25-10\sqrt{a^2+b^2} \\ a\geqq 0\text{ かつ }b\geqq \dfrac{1}{2}a+5\text{ のとき} & 25-10b \\ -\dfrac{3}{4}a\leqq b\leqq \dfrac{1}{2}a-5\text{ のとき} & 25-8a+6b \\ 2a+b\geqq 5\text{ かつ }\dfrac{1}{2}a-5\leqq b\leqq \dfrac{1}{2}a+5\text{ のとき} & -\dfrac{1}{5}a^2-\dfrac{4}{5}b^2+\dfrac{4}{5}ab-4a-2b+5 \end{cases}$$

4　$\begin{cases} p(n)=\dfrac{n}{2^{n+1}} & (n\text{ が偶数}) \\ p(n)=\dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n\text{ が奇数}) \end{cases}$