◀2012 年　東京大学（前期）▶

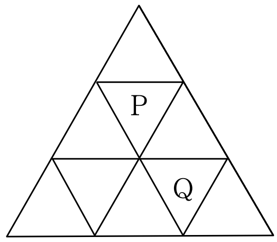
♠ 理　科

1　次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える．

$$x^2+(y-1)^2 \leqq 1, \quad x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 ℓ は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする．その線分の長さ L の最大値を求めよ．また，L が最大値をとるとき，x 軸と ℓ のなす角 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ．

2　図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P, Q を定める．1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する．球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ．



3　座標平面上で 2 つの不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2, \quad \frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を S とする．S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする．

(1)　V_1 と V_2 の値を求めよ．

(2)　$\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ．

4　n を 2 以上の整数とする．自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする．以下の問いに答えよ．

(1)　連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ．

(2)　連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ．

5　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする．

　(D)　A の成分 a, b, c, d は整数である．また，平面上の 4 点 $(0, 0), (a, b), (a+c, b+d), (c, d)$ は，面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす．

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ．

(2)　$c=0$ ならば，A に B, B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより，4 個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ．

(3)　$|a| \geqq |c| > 0$ とする．$BA, B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は，それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x|+|z|<|a|+|c|$$

を満たすことを示せ．

6　2×2 行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathrm{Tr}(P) = p + s$$

と定める．

$a,\ b,\ c$ は $a \geqq b > 0,\ 0 \leqq c \leqq 1$ を満たす実数とする．行列 $A,\ B,\ C,\ D$ を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

また，実数 x に対し $U(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　各実数 t に対して，x の関数

$$f(x) = \mathrm{Tr}\left((U(t)AU(-t) - B)U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x) \right)$$

の最大値 $m(t)$ を求めよ．（ただし，最大値をとる x を求める必要はない．）

(2)　すべての実数 t に対し

$$2\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D) \geqq \mathrm{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t)$$

が成り立つことを示せ．

♠ 文　科

1　座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす．

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ．

2　実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O$(0,\ 0)$, A$(0,\ 1)$, B$(1,\ 0)$, C$(t,\ 0)$ を考える．また線分 AB 上の点 D を $\angle$ACO $= \angle$BCD となるように定める．

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．

3　理科 **2** と同じ．

4　座標平面上の放物線 C を $y = x^2 + 1$ で定める．$s,\ t$ は実数とし $t < 0$ を満たすとする．点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を $\ell_1,\ \ell_2$ とする．

(1)　$\ell_1,\ \ell_2$ の方程式を求めよ．

(2)　a を正の実数とする．放物線 C と直線 $\ell_1,\ \ell_2$ で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ を全て求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理　科

- **1** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式・三角関数
- **2** やや難 $\boxed{\text{A}}$ 確率
- **3** 標準 $\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用・$\boxed{\text{C}}$ いろいろな曲線
- **4** やや難 $\boxed{\text{A}}$ 整数問題
- **5** 標準 $\boxed{\text{C}}$ 行列
- **6** やや難 $\boxed{\text{C}}$ 行列

♣ 文　科

- **1** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 多変数関数
- **2** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式
- **3** やや難 $\boxed{\text{A}}$ 確率
- **4** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 微分積分

略解

◇ 理　科

1　L の最大値：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2　$\begin{cases} n \text{ が奇数のとき,}\quad 0 \\ n \text{ が偶数のとき,}\quad \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\right) \end{cases}$

3　(1)　$V_1=\dfrac{11}{480}\pi$,　$V_2=\dfrac{8\sqrt{2}-7}{192}\pi$

(2)　$\dfrac{V_2}{V_1}<1$

4　(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

5　(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

6　(1)　$m(t)=2(a-b)|\cos t|$

(2)　証明は省略

◇ 文　科

1　$x=\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

2　最大値は $3-2\sqrt{2}$（$t=\sqrt{2}-1$）

3　理科 **2** と同じ.

4　(1)　$y=2(s\pm\sqrt{s^2-t+1})x-2s(s\pm\sqrt{s^2-t+1})+t$（複号同順）

(2)　$\begin{cases} 0<a\leqq\dfrac{2}{3} \text{ のとき, } (s,\ t) \text{ は存在しない.} \\ a>\dfrac{2}{3} \text{ のとき, } t=s^2-\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}+1 \quad \left(-\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}<s<\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}\right) \end{cases}$