# ◀2011 年　東京大学（前期）▶

## ♠ 理　科

**1** 座標平面において，点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を $C$ とする．$a$ を $0 < a < 1$ を満たす実数とし，直線 $y = a(x+1)$ と $C$ との交点を Q, R とする．

(1) $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積 $S(a)$ を求めよ．

(2) $a$ が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる $a$ を求めよ．

**2** 実数 $x$ の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 $y$ のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す．実数 $a$ に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 $a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める．

（ i ） $a_1 = \langle a \rangle$

（ii） $$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

(2) 任意の自然数 $n$ に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 $a$ をすべて求めよ．

(3) $a$ が有理数であるとする．$a$ を整数 $p$ と自然数 $q$ を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，$q$ 以上のすべての自然数 $n$ に対して，$a_n = 0$ であることを示せ．

**3** $L$ を正定数とする．座標平面の $x$ 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり $L$ だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$ と表す．

(1) $u(t),\ v(t)$ を求めよ．

(2) $0 < a < 1$ の範囲の実数 $a$ に対し，積分

$$f(a) = \int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2}\, dt$$

を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ．

**4** 座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ をとる．放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ．

**5** $p,\ q$ を 2 つの正の整数とする．整数 $a,\ b,\ c$ で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p, \quad b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a,\ b\ ;\ c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ．各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\ ;\ c]$ に対して

$$w([a,\ b\ ;\ c]) = p - q - (a+b)$$

とおく．

(1) $(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\ ;\ c]) = -q$ となるものの個数を求めよ．また，$w([a,\ b\ ;\ c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ．

以下 $p = q$ の場合を考える．

(2)　$s$ を整数とする．$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\ ;\ c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ．

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ．

**6**

(1)　$x,\ y$ を実数とし，$x > 0$ とする．$t$ を変数とする 2 次関数 $f(t) = xt^2 + yt$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ．

(2)　次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を $S$ とする．

$x > 0$ かつ，実数 $z$ で $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲の全ての実数 $t$ に対して

$$0 \leqq xt^2 + yt + z \leqq 1$$

を満たすようなものが存在する．

$S$ の概形を図示せよ．

(3)　次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域を $V$ とする．

$0 \leqq x \leqq 1$ かつ，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲の全ての実数 $t$ に対して

$$0 \leqq xt^2 + yt + z \leqq 1$$

が成り立つ．

$V$ の体積を求めよ．

## ♠ 文　科

**1**　$x$ の 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が，3 つの条件

$$f(1) = 1,\quad f(-1) = -1,\quad \int_{-1}^{1} (bx^2 + cx + d)\,dx = 1$$

を全て満たしているとする．このような $f(x)$ の中で定積分

$$I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{f''(x)\}^2\,dx$$

を最小にするものを求め，そのときの $I$ の値を求めよ．ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す．

**2**　実数 $x$ の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 $y$ のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す．実数 $a$ に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 $a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める．

（ i ）　$a_1 = \langle a \rangle$

（ii）　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

(2)　任意の自然数 $n$ に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 $a$ をすべて求めよ．

**3**　$p,\ q$ を 2 つの正の整数とする．整数 $a,\ b,\ c$ で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\quad b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a,\ b\ ;\ c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ．各 $(p,\ q)$

パターン $[a,\ b\ ;\ c]$ に対して

$$w([a,\ b\ ;\ c]) = p - q - (a+b)$$

とおく．

（1）$(p,\,q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\ ;\ c]) = -q$ となるものの個数を求めよ．また，$w([a,\ b\ ;\ c]) = p$ となる $(p,\,q)$ パターンの個数を求めよ．

以下 $p = q$ の場合を考える．

（2）$s$ を $p$ 以下の整数とする．$(p,\,p)$ パターンで $w([a,\ b\ ;\ c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ．

**4**　理科 **4** と同じ．

## 出題範囲と難易度

### ♣ 理　科

- **1** |標準| III 微分法の応用
- **2** |やや難| B 数列
- **3** |やや難| III 積分法の応用
- **4** |標準| II 図形と方程式
- **5** |標準| A 場合の数
- **6** |難| III 積分法の応用

### ♣ 文　科

- **1** |基本| II 微分積分
- **2** |標準| B 数列
- **3** |やや難| A 場合の数
- **4** |標準| II 図形と方程式

# 略解

## ◇ 理　科

**1** (1) $S(a)=\dfrac{\sqrt{2}a(1-a)}{a^2+1}$

(2) $a=2-\sqrt{3}$

**2** (1) $a_n=\sqrt{2}-1$

(2) $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad -1+\sqrt{2}$

(3) 証明は省略

**3** (1) $u(t)=t\cos\dfrac{L}{t},\quad v(t)=t\sin\dfrac{L}{t}$

(2) $f(a)=\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}+L\left\{\log(\sqrt{1+L^2}-L)-\log\dfrac{\sqrt{a^2+L^2}-L}{a}\right\}$

(3) $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}=-L$

**4** $\left(x-\dfrac{1}{6}\right)\left(y+\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{1}{9},\quad \dfrac{1}{6}<x<\dfrac{1}{2}$

**5** (1)

$$\begin{cases} w([a,b;c])=-q \text{ のとき} & p+1 \text{ 個} \\ w([a,b;c])=p \text{ のとき} & q+1 \text{ 個} \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} s<0 \text{ または } s>2p \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ 0\leqq s\leqq p \text{ のとき} & (p+1)(s+1) \text{ 個} \\ p<s\leqq 2p \text{ のとき} & (p+1)(2p-s+1) \text{ 個} \end{cases}$$

(3) $(p+1)^3$ 個

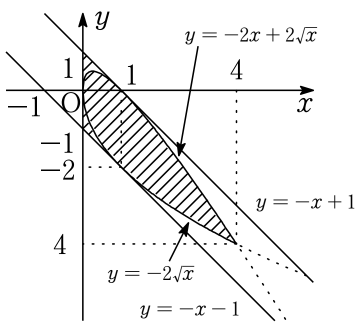
**6** (1)

$$\begin{cases} y\geqq 0 \text{ のとき} & x+y \\ -x\leqq y\leqq 0 \text{ のとき} & x+y+\dfrac{y^2}{4x} \\ -2x\leqq y\leqq -x \text{ のとき} & \dfrac{y^2}{4x} \\ y\leqq -2x \text{ のとき} & -(x+y) \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} y<-2x \text{ のとき} & -x-y\leqq 1 \\ -2x\leqq y\leqq -x \text{ のとき} & y^2\leqq 4x \\ -x\leqq y\leqq 0 \text{ のとき} & -2x-2\sqrt{x}\leqq y\leqq -2x+2\sqrt{x} \\ y>0 \text{ のとき} & x+y\leqq 1 \end{cases}$$

右図斜線部分で，境界線上の点は，$y$ 軸上の点を含まず他は含む．




(3) $\dfrac{17}{18}$

## ◇ 文　科

**1**　$I=\dfrac{81}{32}$，　$f(x)=-\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}$

**2**　理科 **2** の (1), (2) と同じ.

**3**　(1)
$$\begin{cases} w([a,\,b;c])=-q \text{ のとき} & p+1 \text{ 個} \\ w([a,\,b;c])=p \text{ のとき} & q+1 \text{ 個} \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} s<0 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ 0\leqq s\leqq p \text{ のとき} & (p+1)(s+1) \text{ 個} \end{cases}$$

**4**　理科 **4** と同じ.