◀2010 年　東京大学（前期）▶

♠理　科

1　3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする．

(1)　V の体積を a, b, c を用いて表せ．

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ．

2

(1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ．

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}\,dx < \frac{1}{2k}$$

(2)　$m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ．

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log\frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

3　2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する．x を 0 以上 30 以下の整数とする．L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作 (#) を繰り返す．

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする．コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す．

ただし，$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする．

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする．
たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる．以下の問 (1), (2), (3) に答えよ．

(1)　$m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ．

(2)　n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ．

(3)　n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ．

4　O を原点とする座標平面上の曲線

$$C : y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$$

と，その上の相異なる 2 点 $\mathrm{P_1}(x_1, y_1)$, $\mathrm{P_2}(x_2, y_2)$ を考える．

(1)　$\mathrm{P}_i\,(i=1, 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ $\mathrm{H}_i\,(i=1, 2)$ とする．このとき $\triangle \mathrm{OP_1H_1}$ と $\triangle \mathrm{OP_2H_2}$ の面積は等しいことを示せ．

(2)　$x_1 < x_2$ とする．このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 $\mathrm{P_1O}$, $\mathrm{P_2O}$ とで囲まれる図形の面積を，y_1, y_2 を用いて表せ．

5　C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする．3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P, Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く．P, Q, R の速さは，それぞれ $m, 1, 2$ であるとする．（したがって，Q は C をちょうど一周する．）ただし，m は $1 \leqq m \leqq 10$ をみたす整数である．△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ．

6　四面体 OABC において，4 つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=3$, $\mathrm{OB}=\sqrt{7}$, $\mathrm{AB}=2$ であるとする．また，3 点 O, A, B を含む平面を L とする．

(1)　点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2)　$0<t<1$ をみたす実数 t に対して，線分 OA, OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t, Q_t とおく．2 点 P_t, Q_t を通り，平面 L に垂直は平面を M とするとき，平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ．

(3)　t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ．

♠ 文　科

1　O を原点とする座標平面上に点 A$(-3,0)$ をとり，$0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件 (ｉ), (ii) をみたす 2 点 B, C を考える．

(ｉ)　B は $y>0$ の部分にあり，$\mathrm{OB}=2$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=180^\circ-\theta$ である．

(ii)　C は $y<0$ の部分にあり，$\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$ である．

ただし，△ABC は O を含むものとする．

以下の問 (1), (2) に答えよ．

(1)　△OAB と △OAC の面積が等しいとき，θ の値を求めよ．

(2)　θ を $0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲で動かすとき，△OAB と △OAC の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

2　2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して

$$f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt$$

が x についての恒等式になるような定数 a, b, c の組をすべて求めよ．

3　2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する．x を 0 以上 30 以下の整数とする．L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作 (#) を繰り返す．

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする．コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す．

ただし，$0\leqq z\leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16\leqq z\leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする．

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする．

たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる．以下の問 (1), (2) に答えよ．

(1)　$m\geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ．

(2)　n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ．

4　理科 **5** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理　科

1 |標準| [II] 多変数関数

2 |やや難| [III] 積分法の応用

3 |やや難| [A] 確率・[B] 数列

4 |やや難| [III] 積分法の応用

5 |標準| [II] 三角関数

6 |やや難| [B] ベクトル（空間）

♣ 文　科

1 |標準| [II] 図形と方程式

2 |標準| [II] 微分積分

3 |やや難| [A] 確率・[B] 数列

4 |やや難| [II] 三角関数

略解

◇ 理　科

1 (1) V の体積を W とするとき，$W=\left\{\dfrac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac\right\}b$

(2) $0<W<\dfrac{\pi}{27}$

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

3 (1) $\begin{cases} x \leqq 15 \text{ のとき，} & P_m(x)=\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x) \\ x \geqq 15 \text{ のとき，} & P_m(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30) \end{cases}$

(2) $P_{2n}(10)=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$

(3) $P_{4n}(6)=\dfrac{1}{5}\left(1-\dfrac{1}{16^n}\right)$

4 (1) 証明は省略

(2) $2\log\dfrac{y_2}{y_1}$

5 $(m,\ t)=\left(4,\ \dfrac{\pi}{6}\right),\ \left(4,\ \dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(4,\ \dfrac{5\pi}{6}\right),\ \left(4,\ \dfrac{7\pi}{6}\right),\ \left(4,\ \dfrac{3\pi}{2}\right),\ \left(4,\ \dfrac{11\pi}{6}\right),$
$\left(8,\ \dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(8,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$

6 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2)
$$S(t)=\begin{cases} 3\sqrt{6}\,t^2 & \left(0<t\leqq\dfrac{2}{9}\right) \\ \dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(1-t) & \left(\dfrac{2}{9}\leqq t<1\right) \end{cases}$$

(3) $\dfrac{3\sqrt{6}}{8}\quad\left(t=\dfrac{9}{16}\right)$

◇ 文　科

1 (1) $\theta=30^\circ$

(2) 最大値：$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\quad\left(\sin\theta=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}\right)$

2 $(a,\ b,\ c)=\left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ 1\right),\ \left(-\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

3 (1) $\begin{cases} x \leqq 15 \text{ のとき，} & P_m(x)=\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x) \\ x \geqq 15 \text{ のとき，} & P_m(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30) \end{cases}$

(2) $P_{2n}(10)=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$

4 理科 **5** と同じ．