◀1997 年　東京大学（前期）▶

♠ 理　科

1　a, b を正の数とし，xy 平面の 2 点 $\mathrm{A}(a, 0)$ および $\mathrm{B}(0, b)$ を頂点とする正 3 角形を ABC とする．ただし，C は第 1 象限の点とする．

(1)　3 角形 ABC が正方形 $D=\{(x, y)|0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ に含まれるような (a, b) の範囲を求めよ．

(2)　(a, b) が (1) の範囲を動くとき，3 角形 ABC の面積 S が最大となるような (a, b) を求めよ．また，そのときの S の値を求めよ．

2　n を正の整数，a を実数とする．すべての整数 m に対して

$$m^2-(a-1)m+\frac{n^2}{2n+1}a>0$$

が成り立つような a の範囲を n を用いて表せ．

3　r は $0<r<1$ をみたす実数とする．xyz 空間に原点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ と 2 点 $\mathrm{A}(1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 1, 0)$ をとる．

(1)　xyz 空間の点 P で条件

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=r\left|\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right|$$

をみたすものが存在するような r の範囲を求めよ．

(2)　点 P が (1) の条件をみたして動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最大値，最小値を r の関数と考えてそれぞれ $M(r)$, $m(r)$ で表す．このとき，左からの極限

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^2\{M(r)-m(r)\}$$

を求めよ．

4　正 3 角形 ABC の頂点 A から辺 AB とのなす角が θ の方向に，3 角形の内部に向かって出発した光線を考える．ただし，$0^\circ<\theta<60^\circ$ とする．この光線は 3 角形の各辺で入射角と反射角が等しくなるように反射し，頂点に到達するとそこでとまるものとする．また，3 角形の内部では光線は直進するものとする．

(1)　$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき，この光線はどの頂点に到達するかを述べよ．

(2)　正の整数 k を用いて $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{6k+2}$ と表せるとき，この光線の到達する頂点を求め，またそこへ至るまでの反射の回数を k を用いて表せ．

5　a を $0<a<\dfrac{1}{4}$ をみたす実数とする．xy 平面で，不等式

$$y^2 \leqq x^2(1-x^2)-a$$

の表す領域を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

6　a を実数とする．

(1)　曲線 $y=\dfrac{8}{27}x^3$ と放物線 $y=(x+a)^2$ の両方に接する直線が x 軸以外に 2 本あるような a の範囲を求めよ．

(2)　a が (1) の範囲にあるとき，この 2 本の接線と放物線 $y=(x+a)^2$ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ．

♠ 文　科

1　a, b は実数で

$$a^2+b^2=16,\ a^3+b^3=44$$

をみたしている．このとき，

(1)　$a+b$ の値を求めよ．

(2)　n を 2 以上の整数とするとき，a^n+b^n は 4 で割り切れる整数であることを示せ．

2　理科 **1** と同じ．

3　r を正の数とする．xyz 空間に原点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ と 3 点 $\mathrm{A}(1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 1, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, 1)$ をとる．xyz 空間の点 P で

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=r\left|\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right|,\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right|$$

をみたすものが 2 つ存在するための r の条件を求めよ．さらに，この 2 点の座標を r を用いて表せ．

4　$0 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数 t に対して，xy 平面上の点 A, B を

$$\mathrm{A}\left(\frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)},\ -2\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{2}{3}t,\ -2t\right)$$

と定める．t が $0 \leqq t \leqq 1$ を動くとき，直線 AB の通りうる範囲を図示せよ．

出題範囲と難易度

♣ 理　科

1　標準　II 図形と方程式・B 複素数と複素数平面

2　やや難　III 分数関数

3　標準　B 空間ベクトル・III 関数の極限

4　標準　I 論証

5　標準　III 積分法の応用

6　標準　II 微分積分

♣ 文　科

1　標準　I 数と式・A 数列

2　標準　II 図形と方程式・B 複素数と複素数平面

3　標準　B 空間ベクトル

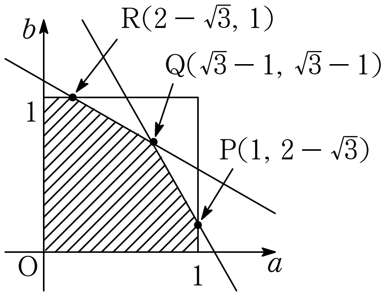
4　標準　II 図形と方程式

略解

◇ 理　科

1 (1) $\begin{cases} 0 \leqq a \leqq 1,\ 0 \leqq b \leqq 1 \\ 0 \leqq \dfrac{a+\sqrt{3}b}{2} \leqq 1,\ 0 \leqq \dfrac{\sqrt{3}a+b}{2} \leqq 1 \end{cases}$

求める領域は右図の斜線部分



(2) $(a,\ b)=(1,\ 2-\sqrt{3}),\ (\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}-1),\ (2-\sqrt{3},\ 1)$ のとき，最大値 $2\sqrt{3}-3$

2 $0<a<2n+1$

3 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq r<1$

(2) $\displaystyle\lim_{r\to 1-0}(1-r)^2\{M(r)-m(r)\}=\frac{1}{2}$

4 (1) 光線は，B に到達する．

(2) 頂点 C が折り返された点．反射回数は，$12k+3$（回）

5 $\dfrac{\pi^2}{4}(1-4a)$

6 (1) $a>-\dfrac{1}{2}$ かつ $a \neq 0$

(2) $S=\dfrac{16}{3}(1+2a)^{\frac{3}{2}}$

◇ 文　科

1 (1) $a+b=2$

(2) 証明は省略

2 理科 **1** と同じ．

3 $\sqrt{3-\sqrt{6}}<r<\sqrt{3+\sqrt{6}}$ かつ $r \neq 1$

$$\left(\frac{-1\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-r^4+6r^2-3)}}{2(r^2-1)},\ \frac{-1\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-r^4+6r^2-3)}}{2(r^2-1)},\ \frac{1}{2}\right)$$（複号同順）

4

（i） $x \geqq 1$ のとき $\begin{cases} y \geqq -3x \\ y \leqq -2 \end{cases}$

（ii） $0<x<1$ のとき $\begin{cases} y \geqq -3x \text{ または } y \geqq -2 \\ y \leqq x^3-3x \end{cases}$

（iii） $x \leqq 0$ のとき $\begin{cases} y \leqq -3x \\ y \geqq -2 \end{cases}$

求める領域は右図の斜線部分