◀1996 年　東京大学（前期）▶

♠理　科

1　xy 平面において，行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とし，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}$ の円を C とする．f による C の像が直線 $x=\dfrac{2}{3}$ に接し，かつ領域 $D=\{(x,\ y)\mid x>0\}$ に含まれるような $(a,\ b)$ 全体のなす図形を ab 平面上に図示せよ．

2　$a,\ b,\ c,\ d$ を正の数とする．不等式

$$\begin{cases} s(1-a)-tb>0 \\ -sc+t(1-d)>0 \end{cases}$$

を同時にみたす正の数 $s,\ t$ があるとき，2 次方程式

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$$

は $-1<x<1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ．

3　空間内の点 O を中心とする一辺の長さが l の立方体の頂点を $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots\cdots,\ \mathrm{A}_8$ とする．また，O を中心とする半径 r の球面を S とする．

(1)　S 上のすべての点から $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots\cdots,\ \mathrm{A}_8$ のうち少なくとも 1 点が見えるための必要十分条件を l と r で表せ．

(2)　S 上のすべての点から $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots\cdots,\ \mathrm{A}_8$ のうち少なくとも 2 点が見えるための必要十分条件を l と r で表せ．

ただし，S 上の点 P から A_k が見えるとは，A_k が S の外側にあり，線分 PA_k と S との共有点が P のみであることとする．

4　1 つのサイコロを続けて投げて，それによって $a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を以下のように定める．

出た目の数を順に $c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots$ とするとき，

$1\leqq k\leqq n-1$ をみたすすべての整数 k に対し $c_k\leqq c_n$ ならば $a_n=c_n$，

それ以外のとき $a_n=0$ とおく．ただし，$a_1=c_1$ とする．

(1)　a_n の期待値を $E(n)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}E(n)$ を求めよ．

(2)　$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n$ のうち 2 に等しいものの個数の期待値を $N(n)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}N(n)$ を求めよ．

5　xyz 空間内の円柱 $x^2+y^2=R^2,\ R>0$ を側面とする容器に，水面が $z=0$ と一致するように $z\leqq 0$ の部分に水がはいっている．

$z\geqq 0$ に対して定義された連続な関数 $r(z)$ で

$$r(0)=0,\quad 0\leqq r(z)<R$$

をみたすものを考える．xz 平面内の不等式

$$0\leqq x\leqq r(z),\quad z\geqq 0$$

で表される領域を z 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を毎秒 1 の速さで下に動かすと，t 秒後には水面が $z=f(t)$ に上昇するという．

$t \geqq 0$ に対し，$f(t) = e^t - t - 1$ であるとき，関数 $r(z)$ を決定せよ．

6　α, β を正の数とし，xy 平面において，だ円

$$C \ : \ \frac{x^2}{\alpha} + \frac{(y - \sqrt{\beta})^2}{\beta} = 1$$

と領域 $D = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ を考える．

(1)　C が D に含まれるような点 $(\alpha,\ \beta)$ の範囲を求め，$\alpha\beta$ 平面上に図示せよ．

(2)　点 $(\alpha,\ \beta)$ が (1) で求めた範囲を動くとき，だ円 C の面積の最大値を求めよ．

♠文　科

1　a を実数とする．行列 $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ が $X^2 - 2X + aE = O$ をみたすような実数 x, y を求めよ．ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

2　理科 **2** と同じ．

3　xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ に対し，正方形 $S(\mathrm{P})$ を連立不等式

$$|x - a| \leqq \frac{1}{2}, \quad |y - b| \leqq \frac{1}{2}$$

の表す領域として定め，原点と $S(\mathrm{P})$ の点との距離の最小値を $f(\mathrm{P})$ とする．点 $(2,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を P が動くとき，$f(\mathrm{P})$ の最大値を求めよ．

4　xyz 空間において，点 P を $(1,\ 0,\ 1)$，点 Q を $(a,\ a+1,\ 0)$ とする．線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転して得られる曲面と平面 $z = 1$ および xy 平面で囲まれる部分の体積を $V(a)$ とおく．a が実数全体を動くときの $V(a)$ の最小値およびそれを与える a の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理　科

1 基本 代幾 １次変換

2 標準 Ⅰ ２次関数

3 難 Ⅰ 図形と計量

4 やや難 微積 数列の極限・確統 確率

5 標準 微積 積分法・微分方程式

6 標準 代幾 ２次曲線

♣ 文　科

1 基本 代幾 行列

2 標準 Ⅰ ２次関数

3 標準 Ⅰ 図形と方程式

4 標準 代幾 空間図形・基解 微分積分（体積）

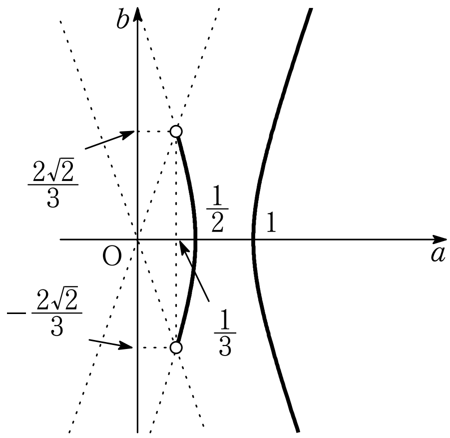
略解

◇ 理　科

1

$$\begin{cases} 8\left(a-\frac{3}{4}\right)^2-b^2=\frac{1}{2} \\ a \geqq 0 \text{ かつ } b^2<8a^2 \end{cases}$$

求める図形は右図の太実線部分



2 証明は省略

3 (1) $r \leqq \dfrac{l}{2}$

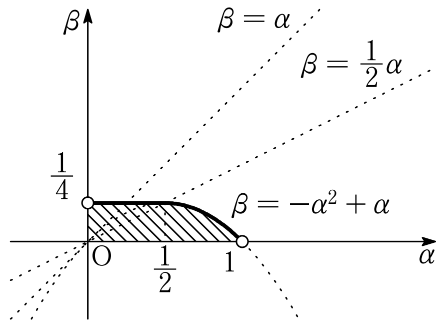
(2) $r \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}l$

4 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E(n)=1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} N(n)=\frac{1}{4}$

5 $r(z)=R\sqrt{\dfrac{z}{z+1}}$ $(z \geqq 0)$

6 (1) 求める領域は，右図斜線部分で境界線上の点については，太実線部分のみ含み，他は含まない．



(2) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$

◇ 文　科

1

$$\begin{cases} \text{(i)}\ a>1 \text{ のとき,} & (x,\ y)=(1,\ \pm\sqrt{a-1}) \\ \text{(ii)}\ a=1 \text{ のとき,} & (x,\ y)=(1,\ 0) \\ \text{(iii)}\ a<1 \text{ のとき,} & (x,\ y)=(1\pm\sqrt{1-a},\ 0) \end{cases}$$

2 証明は省略

3 $\dfrac{\sqrt{10}+2}{2}$

4 最小値 ： $\dfrac{7}{24}\pi$ $\left(a=-\dfrac{3}{4}\right)$