◀1995 年　東京大学（前期）▶

♠ 理　科

1　すべての正の実数 $x,\ y$ に対し

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ．

2　$f(x)=1-\sin x$ に対し，$g(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$ とおく．

このとき，任意の実数 $x,\ y$ について

$$g(x+y)+g(x-y) \geqq 2g(x)$$

が成り立つことを示せ．

3　二辺の長さが 1 と 2 の長方形と一辺の長さが 2 の正方形の 2 種類のタイルがある．縦 2，横 n の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷きつめることを考える．そのような並べ方の総数を A_n で表す．ただし n は正の整数である．たとえば $A_1=1,\ A_2=3,\ A_3=5$ である．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　$n \geqq 3$ のとき，A_n を $A_{n-1},\ A_{n-2}$ を用いて表せ．

(2)　A_n を n で表せ．

4　N を正の整数とする．N の正の約数 n に対し

$$f(n)=n+\frac{N}{n}$$

とおく．このとき，次の各 N に対して $f(n)$ の最小値を求めよ．

(1)　$N=2^k$，ただし k は正の整数

(2)　$N=7!$

5　サイコロを n 回投げて，xy 平面上の点 $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_n$ を次の規則 (a), (b) によって定める．

(a)　$\mathrm{P}_0(0,\ 0)$

(b)　$1 \leqq k \leqq n$ のとき，k 回目に出た目の数が 1, 2, 3, 4 のときには，P_{k-1} をそれぞれ東，北，西，南に $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ だけ動かした点を P_k とする．また，k 回目に出た目の数が 5, 6 のときには $\mathrm{P}_k=\mathrm{P}_{k-1}$ とする．ただし y 軸の正の向きを北と定める．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　P_n が x 軸上にあれば，$\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{n-1}$ もすべて x 軸上にあることを示せ．

(2)　P_n が第 1 象限 $\{(x,\ y)\,|\,x>0,\ y>0\}$ にある確率を n で表せ．

6　原点を O とする xy 平面上の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

上の点 P における接線と 2 つの漸近線との交点を Q, R とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　三角形 OQR の面積 S は，点 P のとり方にはよらず，$a,\ b$ によって定まることを示せ．

(2)　$a=5e^{2t}+e^{-t},\ b=e^{2t}+e^{-t}$ として実数 t を変化させるときの S の最小値を求めよ．

♠ 文　科

1　理科 **1** と同じ．

2　自然数 k に対し，xy 平面上のベクトル

$$\vec{v_k} = \left(\cos\frac{k\pi}{4},\ \sin\frac{k\pi}{4}\right)$$

を考える．$a,\ b$ を正の数とし，平面上の点 $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_8$ を

$$\mathrm{P}_0(0,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_{2n+1}} = a\vec{v}_{2n+1},\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$
$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2n+1}\mathrm{P}_{2n+2}} = b\vec{v}_{2n+2},\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

により定める．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　$\mathrm{P}_8 = \mathrm{P}_0$ であることを示せ．

(2)　$\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_8$ を順に結んで得られる八角形の面積 S を $a,\ b$ を用いて表せ．

(3)　面積 S が 7，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_4$ の長さが $\sqrt{10}$ のとき，$a,\ b$ の値を求めよ．

3　xy 平面において，曲線 $y = -x^3 + ax$ 上の $x>0$ の部分に，点 P を次の条件をみたすようにとる．ただし，$a>0$ とする．

> 点 P におけるこの曲線の接線と y 軸との交点を Q とするとき，原点 O における接線が $\angle \mathrm{QOP}$ を二等分する．

このとき，$\triangle \mathrm{QOP}$ の面積 $S(a)$ の最小値と，それを与える a の値を求めよ．

4　半径 1cm の半球形の器が水平から角 θ だけ傾けて固定されている．ただし $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする．この器に毎秒 $\frac{\pi}{18}\mathrm{cm}^3$ の割合で水を入れるとき，入れはじめてから $3+\cos^2\theta$ 秒後に器から水が流れだした．このときの θ の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理　科

1 標準　I 不等式の証明・微積 微分法の応用

2 基本　微積 積分法

3 基本　基解 数列

4 標準　I 整数問題

5 標準　基解 数列・確統 確率

6 標準　代幾 ２次曲線・微積 微分法の応用

♣ 文　科

1 標準　I 不等式の証明・微積 微分法の応用

2 標準　代幾 ベクトル

3 標準　基解 微分積分

4 標準　基解 三角関数・微分積分

略解

◇ 理　科

1　$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

2　証明は省略

3　(1)　$A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2}$

(2)　$A_n = \dfrac{1}{3}\{2^{n+1} - (-1)^{n+1}\}$

4　(1)　$\begin{cases} k \text{ が偶数のとき，} & 2\sqrt{N} \\ k \text{ が奇数のとき，} & 3\sqrt{\dfrac{N}{2}} \end{cases}$

(2)　142

5　(1)　証明は省略

(2)　$\dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{2^{n+1}-1}{3^n}\right)$

6　(1)　$S = ab$ となり S は一定であることが示される．

(2)　$\dfrac{12}{\sqrt[3]{5}}$

◇ 文　科

1　$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

2　(1)　証明は省略

(2)　$S = a^2 + 2\sqrt{2}ab + b^2$

(3)　$(a,\ b) = (\sqrt{2},\ 1),\ (1,\ \sqrt{2})$

3　$a = 1$ のとき，S の最小値は 1

4　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$