◀2015 年　東北大学（前期）▶

♠ 理系学部（医学部保健学科看護学専攻を除く）

1 xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする．

$$x^2+4y^2=1,\quad x>0,\quad y>0$$

P を C 上の点とする．P で C に接する直線を ℓ とし，P を通り ℓ と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする．P が C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときの P の座標を求めよ．

2 xy 平面において，3 次関数 $y=x^3-x$ のグラフを C とし，不等式

$$x^3-x>y>-x$$

の表す領域を D とする．また，P を D の点とする．

(1) P を通り C に接する直線が 3 本存在することを示せ．

(2) P を通り C に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ．

3 サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし，x の 2 次方程式

$$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を考える．

(1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ．

(2) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ．

(3) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち，かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ．

4 $a>0$ を実数とする．$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対し，座標平面の 3 点

$$(2n\pi,\ 0),\quad \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\right),\quad ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}\,dx,\quad C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}\,dx$$

とおく．

(1) $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ．

5 $t>0$ を実数とする．座標平面において，3 点 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$, P$(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える．

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ．

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ．

(3) 辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく．t が (1) で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

6　$k \geqq 2$ と n を自然数とする．n が k 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，

$$n = m + (m+1) + \cdots\cdots + (m+k-1)$$

が成り立つような自然数 m が存在するとき，n を $k-$ 連続和とよぶことにする．ただし，自然数とは 1 以上の整数のことである．

(1)　n が $k-$ 連続和であることは，次の条件 (A), (B) の両方が成り立つことと同値であることを示せ．

(A)　$\dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$ は整数である．

(B)　$2n > k^2$ が成り立つ．

(2)　f を自然数とする．$n = 2^f$ のとき，n が $k-$ 連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しないことを示せ．

(3)　f を自然数とし，p を 2 でない素数とする．$n = p^f$ のとき，n が $k-$ 連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ の個数を求めよ．

♠ 文系学部・医（保健学科看護学専攻）

1　次の性質をもつ数列 $\{a_n\}$ を考える．

$a_1 = 3$

$a_{n+1} > a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

${a_n}^2 - 2a_na_{n+1} + {a_{n+1}}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(1)　$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対し，$a_n + a_{n+2}$ を a_{n+1} を用いて表せ．

(2)　$b_n = a_{n+1} - a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ により定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

2　理系学部 **5** と同じ．

3　サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし，x の 2 次方程式

$$2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を考える．

(1)　方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ．

(2)　方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち，かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ．

4　$a > 0$ を実数とする．関数 $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする．

(1)　$M(a)$ を求めよ．

(2)　実数 $x > 0$ に対し，$g(x) = M(x)^2$ とおく．xy 平面において，関数 $y = g(x)$ のグラフに点 $(s, g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s > 0$ とその接線の傾きを求めよ．

(3)　a が正の実数全体を動くとき，$k = \dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準　III　２次曲線
- **2** やや難　II　微分積分
- **3** 標準　I　２次関数・A　確率
- **4** 標準　III　関数の極限・積分法
- **5** やや難　I　図形と計量（空間）
- **6** やや難　A　整数の性質

♣ 文系学部

- **1** 標準　B　数列
- **2** やや難　I　図形と計量（空間）
- **3** 標準　I　２次関数・A　確率
- **4** やや難　II　微分積分

略解

◇ 理系学部

1　最大値：$\dfrac{9}{32}$　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

2（1）証明は省略

（2）$\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

3（1）$\dfrac{5}{216}$

（2）$\dfrac{11}{72}$

（3）$\dfrac{89}{216}$

4（1）証明は省略

（2）$\dfrac{\pi}{4}$

（3）1

5（1）$1<t<2$

（2）$\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$

（3）最大値：$\dfrac{1}{2}$　$\left(t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

6（1）証明は省略

（2）証明は省略

（3）f（個）

◇ 文系学部

1（1）$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}+3$

（2）$b_n=3(n+1)$

（3）$a_n=\dfrac{3}{2}n(n+1)$

2　理系学部 **5** と同じ．

3（1）$\dfrac{5}{216}$

（2）$\dfrac{11}{72}$

4（1）

$$M(a)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}} & (0<a\leqq 9)\\ a-1 & (a\geqq 9)\end{cases}$$

（2）$s=\dfrac{3}{2}$，接線の傾き：$\dfrac{9}{4}$

（3）最小値：$\dfrac{3}{2}$　$\left(a=\dfrac{3}{2}\right)$