# ◀2014 年　東北大学（前期）▶

## ♠ 理系学部（医学部保健学科看護学専攻を除く）

**1**　$x=t+\frac{1}{3t}\ \left(0<t\leqq\frac{1}{2}\right)$ とする．

(1)　$x$ のとり得る値の範囲を求めよ．

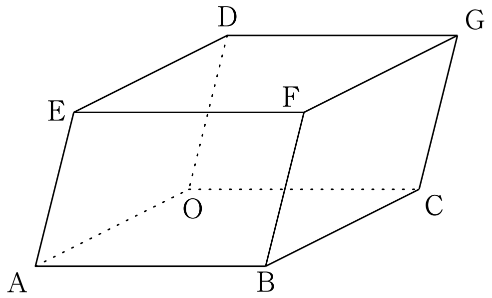
(2)　$x$ の方程式 $x^2+ax+b=0$ が (1) の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

**2**　下図のような平行六面体 OABC − DEFG が $xyz$ 空間内にあり，O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), C(0, 3, 0), D$(-1,\ 0,\ \sqrt{6})$ とする．辺 AB の中点を M とし，辺 DG 上の点 N を MN = 4 かつ DN＜GN を満たすように定める．

(1)　N の座標を求めよ．

(2)　3 点 E, M, N を通る平面と $y$ 軸との交点 P を求めよ．

(3)　3 点 E, M, N を通る平面による平行六面体 OABC − DEFG の切り口の面積を求めよ．




**3**　1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある．

(1)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す．書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ．

(2)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す．書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ．

(3)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す．1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ．

**4**　不等式 $1\leqq x^2+y^2\leqq 4$ が表す $xy$ 平面内の領域を $D$ とする．P を円 $x^2+y^2=1$ 上の点，Q と R を円 $x^2+y^2=4$ 上の異なる 2 点とし，三角形 PQR は領域 $D$ に含まれているとする．$a,\ b$ を実数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換により P は P′，Q は Q′，R は R′ に移されるとする．このとき，三角形 P′Q′R′ が領域 $D$ に含まれるための $a,\ b$ の必要十分条件を求めよ．ただし，三角形は内部も含めて考えるものとする．

**5**　整数 $n$ に対して，

$$I_n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}\,dx$$

とする．

(1)　$I_0$ を求めよ．

(2)　$n$ を正の整数とするとき，$I_n - I_{n-1}$ を求めよ．

(3)　$I_5$ を求めよ．

**6**　以下の問いに答えよ．

(1)　$n$ を自然数，$a$ を正の定数として，

$$f(x) = (n+1)\{\log(a+x) - \log(n+1)\} - n(\log a - \log n) - \log x$$

とおく．$x > 0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(2)　$n$ が 2 以上の自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} > (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

## ♠ 文系学部・医（保健学科看護学専攻）

**1**　曲線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線を $\ell_1$，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線を $\ell_2$ とする．ただし，$a < b$ とする．$\ell_1$ と $\ell_2$ の交点を R とし，線分 PR，線分 QR および曲線 $C$ で囲まれる図形の面積を $S$ とする．

(1)　R の座標を $a$ と $b$ を用いて表せ．

(2)　$S$ を $a$ と $b$ を用いて表せ．

(3)　$\ell_1$ と $\ell_2$ が垂直であるときの $S$ の最小値を求めよ．

**2**　理系学部 **3** と同じ．

**3**　$t$ を正の実数とする．三角形 OAB の辺 OA を 2 : 1 に内分する点を M，辺 OB を $t$ : 1 に内分する点を N とする．線分 AN と線分 BM の交点を P とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および $t$ を用いて表せ．

(2)　直線 OP は線分 BM と直交し，かつ $\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線であるとする．このとき，辺 OA と辺 OB の長さの比と $t$ の値を求めよ．

**4**　実数 $x$, $y$ に対して

$$A = 2\sin x + \sin y, \quad B = 2\cos x + \cos y$$

とおく．

(1)　$\cos(x - y)$ を $A$, $B$ を用いて表せ．

(2)　$x$, $y$ が $A = 1$ を満たしながら変化するとき，$B$ の最大値と最小値，およびそのときの $\sin x$, $\cos x$ の値を求めよ．

## 出題範囲と難易度

### ♣ 理系学部

1 |標準| [I] ２次関数・[III] 微分法

2 |標準| [B] ベクトル（空間）

3 |やや難| [A] 確率

4 |標準| [C] 行列・１次変換

5 |標準| [III] 積分法の応用

6 |難| [B] 数列・[III] 積分法の応用

### ♣ 文系学部

1 |標準| [II] 微分積分

2 |やや難| [A] 確率

3 |標準| [B] ベクトル（平面）

4 |標準| [II] 三角関数

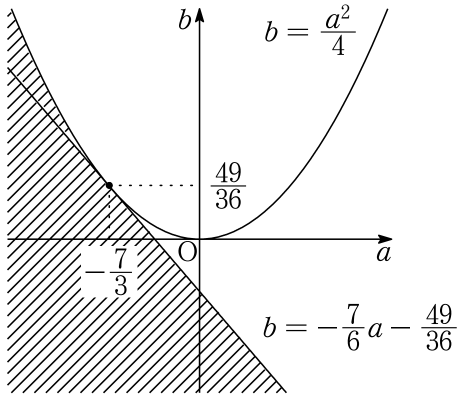
Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

# 略解

## ◇ 理系学部

**1** (1) $x \geqq \dfrac{7}{6}$

(2) 右図斜線部分で境界線上の点を含む.




**2** (1) $\mathrm{N}\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ \sqrt{6}\right)$

(2) $\mathrm{P}(0,\ 2,\ 0)$

(3) $\dfrac{\sqrt{151}}{2}$

**3** (1) $\dfrac{4}{45}$

(2) $\dfrac{1}{42}$

(3) $\dfrac{2}{75}$

**4** $a^2+b^2=1$

**5** (1) $I_0=\dfrac{1}{2}\log 2$

(2) $$I_n-I_{n-1}=\begin{cases} 0 & (n=4k) \\ -\dfrac{1}{n} & (n=4k-3) \\ \dfrac{2}{n} & (n=4k-2) \\ -\dfrac{1}{n} & (n=4k-1) \end{cases} \quad (k \text{ は自然数})$$

**別解** $I_n-I_{n-1}=\dfrac{1}{n}\left(\cos n\pi-\cos\dfrac{n}{2}\pi\right)$

(3) $I_5=\dfrac{1}{2}\log 2-\dfrac{8}{15}$

**6** (1) 極小値：0 $\left(x=\dfrac{a}{n}\right)$

(2) 証明は省略

## ◇ 文系学部

**1** (1) $\mathrm{R}\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$

(2) $\dfrac{(b-a)^3}{12}$

(3) 最小値：$\dfrac{1}{12}$ $\left(a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}\right)$

**2** 理系学部 **3** と同じ.

**3** (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{t+3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{t}{t+3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2) $\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=3:2,\quad t=3$

**4** (1) $\cos(x-y)=\dfrac{A^2+B^2-5}{4}$

(2) 最大値：$2\sqrt{2}$ $\left(\sin x=\dfrac{1}{3},\ \cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

最小値：$-2\sqrt{2}$ $\left(\sin x=\dfrac{1}{3},\ \cos x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto