◀2013 年　東北大学（前期）▶

♠ 理系学部（医学部保健学科看護学専攻を除く）

1　k を実数とする．3 次式 $f(x)=x^3-kx^2-1$ に対し，方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解を α, β, γ とする．$g(x)$ は x^3 の係数が 1 である 3 次式で，方程式 $g(x)=0$ の 3 つの解が $\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$ であるものとする．

(1)　$g(x)$ を k を用いて表せ．

(2)　2 つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通の解をもつような k の値を求めよ．

2　四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とする．
$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　CH の長さを求めよ．

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ．

3　A, B の 2 人が，サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う．自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する．A から投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ．

(1)　A がちょうど 2 回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ．

(2)　B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ．

(3)　B がちょうど 3 回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ．

4　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta,\quad b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta\quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底とする．

(1)　一般項 b_n を求めよ．

(2)　すべての n について，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

5　2 次の正方行列 A を $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ で定める．$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$ を関係式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定める．ただし，$x_0=1$, $y_0=0$ とする．

(1)　A^4 を求めよ．

(2)　$n=0, 1, 2, \cdots\cdots$ に対して，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=(E-A^{n+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．ただし，E は 2 次の単位行列とする．

(3)　原点 O から P_n までの距離 OP_n が最大となる n を求めよ．

6　半径 1 の円を底面とする高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある．底面の円の中心を O とし，直径を 1 つ取り AB とおく．AB を含み底面と 45° の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けるとき，体積の小さい方の部分を V とする．

(1)　直径 AB と直交し，O との距離が t $(0 \leqq t \leqq 1)$ であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ．

(2)　V の体積を求めよ．

♠ 文系学部・医（保健学科看護学専攻）

1　a を実数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ が，$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(2)　a が (1) で求めた範囲を動くとき，放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a$ の頂点の y 座標が取りうる値の範囲を求めよ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　A, B の 2 人が，サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う．自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する．A から投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ．

(1)　B がちょうど 1 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ．

(2)　B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ．

(3)　B がちょうど 2 回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ．

4　t は $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数とする．放物線 $y=x^2$，直線 $x=1$，および x 軸とで囲まれた図形を A，放物線 $y=4(x-t)^2$ と直線 $y=1$ とで囲まれた図形を B とする．A と B の共通部分の面積を $S(t)$ とする．

(1)　$S(t)$ を求めよ．

(2)　$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の最大値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準 II 高次方程式
2 基本 B ベクトル（空間）
3 標準 A 確率
4 標準 III 数列の極限・積分法の応用
5 標準 C 行列・１次変換
6 標準 III 積分法の応用

♣ 文系学部

1 基本 I ２次関数
2 基本 B ベクトル（空間）
3 標準 A 確率
4 標準 II 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $g(x) = x^3 + kx - 1$

(2) $k = -2,\ 0$

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

(2) $\mathrm{CH} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\dfrac{1}{12}$

3 (1) $\dfrac{25}{54}$

(2) $\dfrac{25}{162}$

(3) $\dfrac{25}{11664}$

4 (1) $b_n = \dfrac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{2}n} - e^{-\frac{1}{2}n}\right)$

(2) 証明は省略

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(na_n) = \frac{1}{2}$

5 (1) $A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) 証明は省略

(3) $n = 8k + 3$（$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$）

6 (1) $S(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-t^2} - \dfrac{1}{4} & \left(0 \leqq t < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \dfrac{1}{2}(1-t^2) & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1\right) \end{cases}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi + \dfrac{2}{3} - \dfrac{5\sqrt{2}}{12}$

◇ 文系学部

1 (1) $-\dfrac{3}{5} \leqq a \leqq 1$

(2) $-\dfrac{49}{25} \leqq y \leqq -\dfrac{3}{4}$

2 理系学部 **2** と同じ.

3 (1) $\dfrac{5}{36}$

(2) $\dfrac{25}{162}$

(3) $\dfrac{25}{324}$

4 (1) $S(t) = \begin{cases} \dfrac{32}{27}t^3 & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{32}{27}t^3 - 4t^2 + 4t - 1 & \left(\dfrac{1}{2} < t \leqq 1\right) \end{cases}$

(2) 最大値 $\dfrac{1}{4}$ $\left(t = \dfrac{3}{4}\right)$