◀2012 年　東北大学（前期）▶

♠ 理系学部（医学部保健学科看護学専攻を除く）

1　s, t を実数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$x=s+t+1,\ y=s-t-1$ とおく．s, t が $s \geqq 0,\ t \geqq 0$ の範囲を動くとき，点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ．

(2)　$x=st+s-t+1,\ y=s+t-1$ とおく．s, t が実数全体を動くとき，点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ．

2　m を実数とする．座標平面上で直線 $y=x$ に関する対称移動を表す 1 次変換を f とし，直線 $y=mx$ に関する対称移動を表す 1 次変換を g とする．以下の問いに答えよ．

(1)　1 次変換 g を表す行列 A を求めよ．

(2)　合成変換 $g \circ f$ を表す行列 B を求めよ．

(3)　$B^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる m をすべて求めよ．

3　袋 A，袋 B のそれぞれに，1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている．これらのカードをよくかきまぜて取り出していく．以下の問いに答えよ．

(1)　$N=4$ とする．袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す．ただし，取り出したカードは元には戻さないものとする．4 回のカードの取り出し操作が終わった後，数字が一致していた回数を X とする．$X=1,\ X=2,\ X=3,\ X=4$ となる確率をそれぞれ求めよ．また，X の期待値を求めよ．

(2)　$N=3$ とし，n は自然数とする．袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，カードの数字が一致していたら，それらのカードを取り除き，一致していなかったら，元の袋に戻すという操作を繰り返す．カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする．p_n と q_n を求めよ．

4　$0 \leqq x \leqq \pi$ に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}\,dt$$

と定める．$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ．

5　長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる．ただし，点 P は点 A, B とは一致していないとする．線分 AB 上の点 Q を $\angle \mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする．以下の問いに答えよ．

(1)　y を x を用いて表せ．

(2)　点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x を求めよ．

6　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\sqrt{\frac{3a_n+4}{2a_n+3}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1)　$n \geqq 2$ のとき，$a_n > 1$ となることを示せ．

(2)　$\alpha^2 = \dfrac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$ を満たす正の実数 α を求めよ．

(3)　すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ となることを示せ．

(4)　$0 < r < 1$ を満たすある実数 r に対して，不等式

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leqq r \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ．さらに，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

♠ 文系学部・医（保健学科看護学専攻）

1　a を正の実数とし，$a \neq \dfrac{1}{2}$ とする．曲線 $C : y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ と $\mathrm{Q}(a,\ a^2)$ をとる．点 P を通り P における C の接線と直交する直線を ℓ とし，点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする．ℓ と m の交点が C 上にあるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　2 直線 $\ell,\ m$ と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ．

2　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \left| 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \sin x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{4} \right|$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1)　$t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ とおく．$f(x)$ を t の関数として表せ．

(2)　x が $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ の範囲を動くとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)　x が $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ の範囲を動くとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ．また，$f(x)$ が最大値をとる x は，$60^\circ < x < 75^\circ$ を満たすことを示せ．

3　理系学部 **3** と同じ．

4　平面上のベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ が

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{2}$$

を満たすとする．ただし，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す．以下の問いに答えよ．

(1)　実数 $p,\ q$ に対して，$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく．このとき，次の条件

$$|\vec{c}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0, \quad p > 0$$

を満たす実数 $p,\ q$ を求めよ．

(2)　平面上のベクトル $\vec{x}$ が

$$-1 \leqq \vec{a}\cdot\vec{x} \leqq 1, \quad 1 \leqq \vec{b}\cdot\vec{x} \leqq 2$$

を満たすとき，$|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

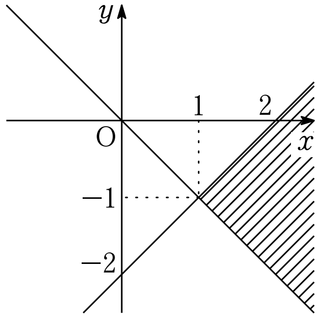
1. 標準　II　図形と方程式
2. 標準　C　１次変換
3. やや難　A　確率
4. やや難　III　積分法の応用
5. 標準　III　微分法の応用
6. やや難　III　数列の極限

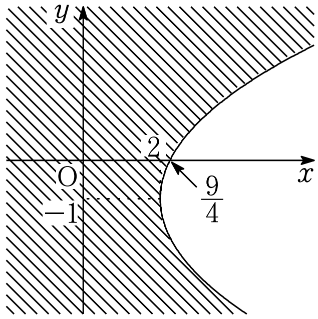
♣ 文系学部

1. 標準　II　微分積分
2. 標準　II　三角関数
3. やや難　A　確率
4. やや難　B　ベクトル（平面）

略解

◇ 理系学部





1 (1) $\begin{cases} y \geqq -x \\ y \leqq x-2 \end{cases}$

右図（上）斜線部分で，境界線上の点を含む.

(2) $x \leqq \dfrac{1}{4}(y+1)^2+2$

右図（下）斜線部分で，境界線上の点を含む.

2 (1) $A=\dfrac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$

(2) $B=\dfrac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 2m & 1-m^2 \\ m^2-1 & 2m \end{pmatrix}$

(3) $m=-2\pm\sqrt{3},\ 1$

3 (1) $P(X=1)=\dfrac{1}{3}$，$P(X=2)=\dfrac{1}{4}$，

$P(X=3)=0$，$P(X=4)=\dfrac{1}{24}$

期待値 ⋯ 1

(2) $p_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$q_n=\begin{cases} 0 & (n=1,\ 2) \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} & (n \geqq 3) \end{cases}$

4 $\begin{cases} \text{最大値}\ \ 2\log\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) & \left(x=\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \text{最小値}\ \ -\log 2 & (x=\pi) \end{cases}$

5 (1) $y=\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2}}$

(2) $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$

6 (1) 証明は省略

(2) $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$

◇ 文系学部

1 (1) $a = 1$

(2) $\dfrac{17}{24}$

2 (1) $f(x) = \left| t^2 + t - \dfrac{9}{4} \right|$

(2) $-1 \leqq t \leqq \sqrt{3}$

(3) $0 \leqq f(x) \leqq \dfrac{5}{2}$，証明は省略

3 理系学部 **3** と同じ．

4 (1) $p = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$q = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $1 \leqq \left| \vec{x} \right| \leqq \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$