◀2011 年　東北大学（前期）▶

♠ 理系学部（医学部保健学科看護学専攻を除く）

1　実数 a に対し，不等式

$$y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$$

の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく．

(1)　$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ．

(2)　$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ．

2　a を実数とする．円 C は点 $(a,\ -a)$ で直線 $y = -x$ を接線にもち，点 $(0,\ 1)$ を通るものとする．C の中心を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ として，以下の問いに答えよ．

(1)　$X,\ Y$ を a を用いて表せ．

(2)　a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

3　先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり，玉の入った箱がある．箱の中には最初，赤玉 3 個，白玉 7 個，全部で 10 個の玉が入っている．先生がサイコロをふって，1 の目が出たら A が，2 または 3 の目が出たら B が，その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う．取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする．この操作を続けて行うものとして以下の問いに答えよ．

ただし，サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする．

(1)　2 回目の操作が終わったとき，A が 2 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ．

(2)　2 回目の操作が終わったとき，B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ．

(3)　3 回目の操作で，C が赤玉を取り出す確率を求めよ．

4　平面上に長さ 3 の線分 OA を考え，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\vec{a}$ で表す．$0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{a}$ となるように点 P を定める．大きさ 2 のベクトル $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と角 $\theta\ (0 < \theta < \pi)$ をなすようにとり，点 B を $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ で定める．線分 OB の中点を Q とし，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする．

このとき，どのように θ をとっても $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ．

5　a を実数，z を 0 でない複素数とする．z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す．

(1)　次を満たす z を求めよ．

$$z + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

(2)　次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ．

$$\overline{z} + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

(3)　次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ．

$$z\left(\overline{z}\right)^2 + \overline{z} - \frac{a}{z} = 0$$

6　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする．f による点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ の像を P_1 とする．正の整数 n に対し，P_n の f による像を P_{n+1} とする．P_n が点 $\mathrm{Q}(10,\ 10)$ に最も近くなるときの n の値を求めよ．

♠ 文系学部・医（保健学科看護学専攻）

1　以下の問いに答えよ．

（1）　実数 x に関する連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq -1 \\ 2\cdot 3^x + a3^{-x} \leqq 1 \end{cases}$$

が解をもつような実数 a の範囲を求めよ．

（2）　$x \geqq -1$ を満たすすべての実数 x に対し不等式

$$3^x + a3^{-x} \geqq a$$

が成り立つような実数 a の範囲を求めよ．

2　三角形 OAB の辺 AB を 1：2 に内分する点を C とする．動点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(x \geqq 1)$ を満たすとし，直線 CD と直線 OB の交点を E とする．

（1）　実数 y を $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定めるとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

（2）　三角形 OAB の面積を S ，三角形 ODE の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$ の最大値と，そのときの x を求めよ．

3　先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり，玉の入った箱がある．箱の中には最初，赤玉 3 個，白玉 7 個，全部で 10 個の玉が入っている．先生がサイコロをふって，1 の目が出たら A が，2 または 3 の目が出たら B が，その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う．取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする．この操作を 2 回続けて行うものとして以下の問いに答えよ．

　ただし，サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする．

（1）　A が 2 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ．

（2）　B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ．

4　放物線 $y = x^2$ の 2 本の接線 ℓ, m は垂直であるとする．

（1）　ℓ の接点の座標が $(a,\ a^2)$ で与えられるとき，ℓ, m の交点の座標を a を用いて表せ．

（2）　ℓ, m が y 軸に関して対称なとき，ℓ, m および放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1. 標準　II 図形と方程式
2. 標準　II 図形と方程式・III 積分法の応用
3. 標準　A 確率
4. 標準　B ベクトル（平面）
5. やや難　II 複素数と方程式
6. 標準　C 行列・１次変換

♣ 文系学部

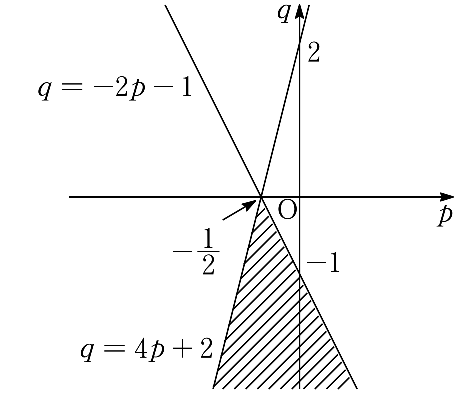
1. 標準　II 図形と方程式・指数関数
2. 標準　B ベクトル（平面）
3. 標準　A 確率
4. 標準　II 微分積分

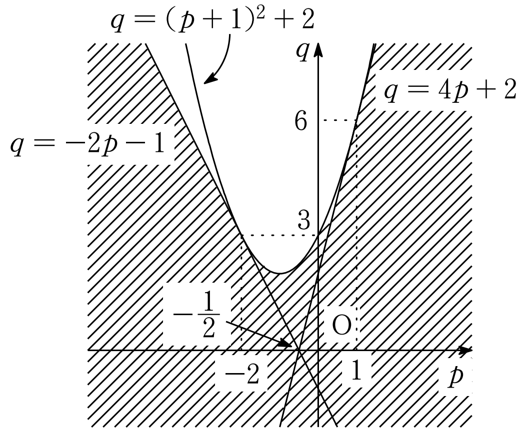
略解

◇ 理系学部

1 (1)
$$\begin{cases} q \leqq -2p-1 \\ q \leqq 4p+2 \end{cases}$$
右図（上）斜線部分で，境界線上の点を含む.

(2)
$$\begin{cases} q \leqq -2p-1 & (p \leqq -2) \\ q \leqq (p+1)^2+2 & (-2 < p < 1) \\ q \leqq 4p+2 & (p \geqq 1) \end{cases}$$
右図（下）斜線部分で，境界線上の点を含む.





2 (1) $(X,\ Y)=\left(a^2+2a+\dfrac{1}{2},\ a^2+\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

3 (1) $\dfrac{1}{540}$

(2) $\dfrac{26}{135}$

(3) $\dfrac{3}{20}$

4 $\dfrac{2}{5} \leqq t < 1$

5 (1) $a=0$ のとき，$z=-1$

$a \neq 0$ のとき，$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

(2) $a \geqq -\dfrac{1}{4}$

(3) $a>0$

6 $n=5$

◇ 文系学部

1 (1) $a \leqq \dfrac{1}{9}$

(2) $-\dfrac{1}{6} \leqq a \leqq 4$

2 (1) 証明は省略

(2) 最大値 $\dfrac{9}{8}$ $\left(x=\dfrac{4}{3}\right)$

3 (1) $\dfrac{1}{540}$

(2) $\dfrac{26}{135}$

4 (1) $\left(\dfrac{4a^2-1}{8a},\ -\dfrac{1}{4}\right)$

(2) $\dfrac{1}{12}$