◀2010 年　東北大学（前期）▶

♠ 理系学部

注：理・工・医（保健学科看護学専攻を除く）・歯・薬学部は，❶〜❻ を解答．農学部は，❶〜❹ を解答．

❶ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ とする．$y < x < a$ を満たすすべての $x,\ y$ に対して

$$f(x) > \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ．

❷ $a,\ b$ を正の実数とする．曲線 $C : y = x^3 - a^2x + a^3$ と点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ．

(2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする．2 つの接点を A, B としたとき，$\angle\mathrm{APB}$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ．

❸ 1, 2, 3, 4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて，次の手順で 5 桁の整数をつくる．まず 1 枚を取り出して現れた数字を 1 の位とする．取り出した 1 枚を元に戻し，4 枚のカードをよく混ぜて，再び 1 枚を取り出して現れた数字を 10 の位とする．このような操作を 5 回繰り返して，5 桁の整数をつくる．得られた整数を X とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ．

(2) X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ．

(3) X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ．

❹ 四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする．以下の問いに答えよ．

(1) 等式

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{PD}}$$

を満たす点 P は存在するか．証明をつけて答えよ．

(2) 点 Q が等式

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QA}} + \overrightarrow{\mathrm{QB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{QC}} + \overrightarrow{\mathrm{QD}}\right|$$

を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ．

(3) 点 R が等式

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{RA}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{RB}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{RC}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{RD}}\right|^2$$

を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ．

(4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|$ であることを示せ．

❺ $0 < t < 3$ のとき，連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq y \leqq \sin x \\ 0 \leqq x \leqq t - y \end{cases}$$

の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする．$\dfrac{d}{dt}V(t) = \dfrac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ．

6　xy 平面において，原点を中心とし $\mathrm{P}(1, 0)$ を頂点の 1 つとする正 6 角形を X とする．A を 2 次の正方行列とし，X の各頂点 (x, y) に対して，行列 A の表す移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で得られる点 (x', y') は X の辺上の点（頂点を含む）であるとする．以下の問いに答えよ．

(1)　点 P が行列 A の表す移動で P 自身に移るとき，X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ．また，そのときの行列 A を求めよ．

(2)　点 P が行列 A の表す移動で X のある頂点に移るとき，X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ．また，そのときの行列 A を求めよ．

♠ 文系学部

✎**注：**文・教育・法・経済・医（保健学科看護学専攻）は全問解答．

1　$f(x) = x^3$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$0 \leqq a < x < y$ を満たすすべての a, x, y に対して

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

が成り立つことを示せ．

(2)　$y < x < b$ を満たすすべての x, y に対して

$$f(x) > \frac{(x - y)f(b) + (b - x)f(y)}{b - y}$$

が成り立つような b の範囲を求めよ．

2　放物線 $C : y = x^2$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}(a, a^2)$ を通り，P における C の接線に直交する直線 l の方程式を求めよ．

(2)　l を (1) で求めた直線とする．$a \neq 0$ のとき，直線 $x = a$ を l に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ．

(3)　(2) で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し，F の座標を求めよ．

3　数直線上を動く点 P がある．裏表の出る確率が等しい硬貨を 2 枚投げて，2 枚とも表が出たら P は正の向きに 1 だけ移動し，2 枚とも裏が出たら P は負の向きに 1 だけ移動し，それ以外のときはその位置にとどまるものとする．P が原点 O を出発点として，このような試行を n 回繰り返して到着した位置を S_n とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$S_2 = -1$ となる確率を求めよ．

(2)　$S_3 = 1$ となる確率を求めよ．

(3)　試行を n 回繰り返して出た表の総数を i とするとき，S_n を求めよ．

(4)　k を整数とするとき，$S_n = k$ となる確率を求めよ．

4　理系学部 **4** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** |やや難| II 式と証明
- **2** |標準| II 微分積分
- **3** |標準| A 確率
- **4** |標準| B ベクトル（空間）
- **5** |やや難| III 積分法の応用
- **6** |やや難| C 行列・１次変換

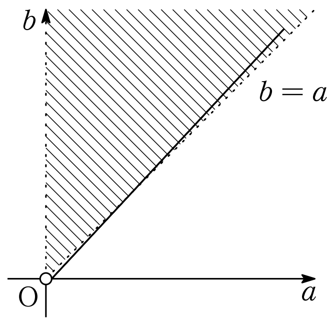
♣ 文系学部

- **1** |やや難| II 式と証明
- **2** |標準| II 微分積分
- **3** |やや難| A 確率
- **4** |標準| B ベクトル（空間）

略解

◇ 理系学部

1 $a \leqq -1$



2 (1) 右図斜線部分で，境界線上の点は含まない．

(2) $a = b,\quad a > \sqrt[4]{\dfrac{4}{23}}$

3 (1) $\dfrac{135}{512}$

(2) $\dfrac{5}{32}$

(3) $\dfrac{45}{64}$

4 (1) 存在しない（証明は省略）

(2) 線分 MN の垂直二等分面

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略

5 $t = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2},\quad V(t) = \pi\left(\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{8} + \dfrac{1}{24}\right)$

6 (1) 証明は省略．$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) 証明は省略．$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix},\ \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mp\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \pm 1 \end{pmatrix},\ \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \mp\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \mp 1 \end{pmatrix},$

$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \pm\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \mp 1 \end{pmatrix},\ \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \pm 1 \end{pmatrix}$ （複号同順）

◇ 文系学部

1 (1) 証明は省略

(2) $b \leqq 0$

2 (1) $2ay + x - a - 2a^3 = 0$

(2) $y = \dfrac{4a^2 - 1}{4a}x + \dfrac{1}{4}$

(3) 証明は省略．$\mathrm{F}\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$

3 (1) $\dfrac{1}{4}$

(2) $\dfrac{15}{64}$

(3) $S_n = i - n$

(4) $\begin{cases} |k| \leqq n \text{ のとき } & {}_{2n}\mathrm{C}_{n+k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n} \\ |k| > n \text{ のとき } & 0 \end{cases}$

4 理系学部 **4** と同じ