◀1995 年　東北大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．A^2 が角 θ $(0<\theta<\pi)$ の回転を表す行列であれば，A も回転を表す行列であることを証明せよ．

2　関数 $f(x)=e^{3x}-6e^{2x}+9e^x$ を考える．

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ．

(2)　(1) で求めた極大値を b とする．曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=b$ によって囲まれる図形の面積を求めよ．

3　1 から 20 までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつある．これらの 20 枚の番号札から同時に 2 枚無作為に取り出し，大きい番号を m とし，小さい番号を n とする．実数 α に対して $[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表すものとして，以下の問いに答えよ．

(1)　$\left[\log_{10}\dfrac{m}{n}\right]=1$ となる $m,\ n$ の組をすべて求めよ．

(2)　$\log_{10}\dfrac{m}{n}<\left[\log_{10}\dfrac{m}{n}\right]+\log_{10}2$ となる確率を求めよ．

4　平面 $z=x-y$ 上の 4 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{C}(2,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{D}(1,\ 0,\ 1)$ を頂点とする四角形（内部を含む）を x 軸のまわりに回転させてできた立体を K とする．

(1)　平面 $x=t$ $(0\leqq t\leqq 2)$ による K の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ．

(2)　K の体積を求めよ．

5　n を 0 または正の整数とし，$I_n=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^n\cos x\,dx$, $J_n=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^n\sin x\,dx$ とする．

(1)　$n\geqq 1$ のとき，I_n と J_{n-1} の関係式，および J_n と I_{n-1} の関係式を求めよ．

(2)　$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対して I_n の値を求めよ．

(3)　$n=0,\ 1,\ 2$ に対し $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^nf(x)\cos x\,dx=4\pi$ を同時にみたす x の 2 次式 $f(x)$ を求めよ．

6　$0<u<\dfrac{\pi}{4}$, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1)　$\dfrac{1}{\tan u}-\dfrac{2}{\tan 2u}$ を簡単にせよ．

(2)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}$ の和を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ を用いてよい．

♠ 文系学部

1　S を方程式 $x^2+y^2+z^2=5$ の定める球面とする．

(1)　S 上の一点 P における接平面を考える．原点 O，接平面上の点 Q に対し，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を求めよ．

(2)　S 上の 2 点 $\mathrm{P_1}(2,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{P_2}(0,\ 2,\ 1)$ のそれぞれにおける接平面を考える．両方の接平面に含まれる点のうち，原点 O からの距離が最小である点 R を求めよ．

2　関数 $y=-x^4+x^3+x^2-x-|x^4+x^3-x^2-x|$ の増減を調べ，そのグラフをかけ．

3　$n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ に対し $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^nf(x)\,dx=0$ を同時にみたす 4 次式 $f(x)$ を求めよ．ただし，$f(x)$ の

x^4 の係数は 1 とする．

4 放物線 $C: y=\dfrac{1}{2}(x^2+3)$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{2}(a^2+3)\right)$, $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{2}(b^2+3)\right)$ $(a<b)$ をとる．A における C の接線と B における C の接線の交点を P とする．

(1) P の座標を a, b を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{APB}=45^\circ$ のとき，a と b の関係式を求めよ．

(3) $\angle\mathrm{APB}=45^\circ$ という関係をみたすように A, B を動かすとき，P の軌跡を求め，それを図示せよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準 代幾 行列
- **2** 標準 微積 微分法の応用・積分法の応用
- **3** 標準 確統 確率
- **4** 標準 基解 微分積分・代幾 平面の方程式
- **5** 基本 微積 積分法
- **6** 標準 微積 数列の極限

♣ 文系学部

- **1** 標準 代幾 ベクトル・球の方程式
- **2** 標準 基解 微分積分
- **3** 基本 基解 微分積分
- **4** 標準 基解 微分積分・代幾 2 次曲線

略解

◇ 理系学部

1　証明は省略

2 (1) 極大値 ： $4\ (x=0)$, 極小値 ： $0\ (x=\log 3)$

(2) $8\log 2-3$

3 (1) $(m,n)=(10,1),(11,1),(12,1),(13,1),(14,1),(15,1),$
$(16,1),(17,1),(18,1),(19,1),(20,1),(20,2)$

(2) $\dfrac{101}{190}$

4 (1)

$$S(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}t^2 & (0\leqq t\leqq 1)\\ \dfrac{\pi}{2}(t^2-4t+4) & (1\leqq t\leqq 2)\end{cases}$$

(2) $\dfrac{\pi}{3}$

5 (1) $I_n=-nJ_{n-1},\ J_n=\pi^n-(-\pi)^n+nI_{n-1}$

(2) $I_0=0,\ I_1=0,\ I_2=-4\pi,\ I_3=0,\ I_4=-8\pi^3+48\pi$

(3) $f(x)=-x^2-x+2\pi^2-13$

6 (1) $\tan u$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}=\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\tan\theta}$

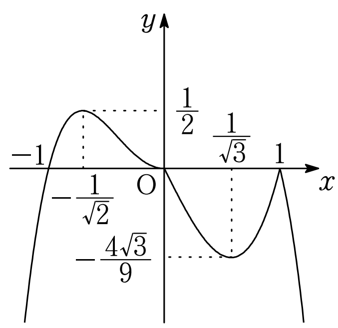
◇ 文系学部

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=5$

(2) $\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

2

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$-$
$f(x)$	↗	極大	↘	0	↘	極小	↗	極大	↘



$$f(x)=\begin{cases}2x^3-2x & (0\leqq x\leqq 1)\\ -2x^4+2x^2 & (x<0,\ 1<x)\end{cases}$$

3　$f(x)=x^4-\dfrac{6}{7}x^2+\dfrac{3}{35}$

4 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{ab+3}{2}\right)$

(2) $a-b=1+ab$

(3) 双曲線 ： $x^2-y^2=-2,\ y<1$（右図）