◀2017 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　半径 1 の円柱を，底面の直径を含み底面と角 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をなす平面で切ってできる小さい方の立体を考える．ただし，円柱の高さは $\tan\alpha$ 以上であるとする．次の問いに答えよ．

(1)　この立体の体積 V を求めよ．

(2)　切り口の面積 A を求めよ．

(3)　この立体の側面積 B を求めよ．

2　t を $0<t<\dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする．三角形 OAB において，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を O′，辺 OB を $t:(1-t)$ に内分する点を A′，辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を B′ とし，線分 AA′ と BB′ の交点を P，BB′ と OO′ の交点を Q，OO′ と AA′ の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, t を用いて表せ．

(2)　OR : RO′ を t を用いて表せ．

(3)　三角形 PQR の面積 M を三角形 OAB の面積 S と t を用いて表せ．

3　三角形があり，その頂点を反時計回りの順に A, B, C とする．三角形 ABC において，点 P は頂点 A から出発し，1 秒経過するごとに隣の頂点へ移動する．ただし，反時計回りに移動する確率は $\dfrac{2}{3}$，時計回りに移動する確率は $\dfrac{1}{3}$ とする．n を自然数とし，点 P が頂点 A を出発してから n 秒経過したときに頂点 A, B, C にある確率を，それぞれ a_n, b_n, c_n とする．次の問いに答えよ．

(1)　a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} を，a_n, b_n, c_n を用いて表せ．

(2)　a_{n+2} を c_n を用いて表せ．

(3)　a_{n+6} を a_n を用いて表せ．

(4)　0 以上の整数 k に対して，a_{6k+1} を求めよ．

4　座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ $(x>0,\,y>0)$，$\mathrm{A}(a,\,0)$ $(a>0)$，$\mathrm{B}(0,\,b)$ $(b>0)$ は，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=1$ をみたすものとする．O を原点とし，線分 OA, AP, PB, BO で囲まれた図形の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\angle$APB を固定して 3 点 P, A, B を動かす．S が最大となるとき，$x=y$ かつ $a=b$ であることを示せ．

(2)　$\angle$APB を固定せず，条件 $x=y$ かつ $a=b$ のもとで 3 点 P, A, B を動かす．このとき，S の最大値を求めよ．

♠ 文系学部

1　駒が単位時間ごとに座標平面上を移動するものとする．n は 0 以上の整数とし，時刻 n に点 $(x,\,y)$ にある駒は，時刻 $n+1$ には $\dfrac{1}{4}$ ずつの確率で，4 点 $(x+1,\,y)$, $(x-1,\,y)$, $(x,\,y+1)$, $(x,\,y-1)$ のいずれかに移動するものとする．時刻 0 に点 $(0,\,0)$ にある駒について，次の問いに答えよ．

(1)　時刻 2 に，駒が点 $(0,\,0)$，点 $(1,\,0)$，点 $(1,\,1)$，点 $(2,\,0)$ にある確率を，それぞれ求めよ．

(2)　時刻 4 に，駒が点 $(0,\,0)$ にある確率を求めよ．

(3)　時刻 n に駒が点 $(x,\,y)$ にあるとき，n と $x+y$ の差は 2 の倍数であることを示せ．

2　$f(x)=2^{3x}+2^{-3x}-4(2^{2x}+2^{-2x})$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　k を実数とする．x についての方程式 $2^x+2^{-x}=k$ の実数解の個数を求めよ．

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ とおく．$f(x)$ を t で表せ．

(3)　x がすべての実数を動くとき，$f(x)$ が最小となるような x と，そのときの $f(x)$ の値を求めよ．

3　三角形 OAB において，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を O′，辺 BO を 1 : 2 に内分する点を A′，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を B′ とし，線分 AA′ と BB′ の交点を P，BB′ と OO′ の交点を Q，OO′ と AA′ の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　OR : RO′ = 6 : 1 となることを示せ．

(3)　三角形 PQR の面積 M を三角形 OAB の面積 S を用いて表せ．

4　1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC の辺 OA 上に A 以外の点 P をとる．点 P から平面 ABC へ垂線をおろし，その垂線と平面 ABC の交点を H とする．PA $=t$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　三角形 HBC の面積 S を t を用いて表せ．

(2)　線分 PH の長さを t を用いて表せ．

(3)　四面体 PHBC の体積 V が最大となるような t と，そのときの V の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用
- **2**　標準　$\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）
- **3**　標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{B}}$ 数列
- **4**　やや難　$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式・三角関数

♣ 文系学部

- **1**　標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率・整数の性質
- **2**　標準　$\boxed{\text{II}}$ 指数関数・微分積分
- **3**　基本　$\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）
- **4**　標準　$\boxed{\text{B}}$ 空間図形

略解

◇ 理系学部

1 (1) $V=\dfrac{2}{3}\tan\alpha$

(2) $A=\dfrac{\pi}{2\cos\alpha}$

(3) $2\tan\alpha$

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

(2) $\mathrm{OR}:\mathrm{RO'}=(1-t):t^2$

(3) $M=\dfrac{(1-2t)^2}{1-t+t^2}S$

3 (1)
$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{2}{3}c_n \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{3}c_n+\dfrac{2}{3}a_n \\ c_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}b_n \end{cases}$$

(2) $a_{n+2}=-\dfrac{1}{3}c_n+\dfrac{4}{9}$

(3) $a_{n+6}=-\dfrac{1}{27}a_n+\dfrac{28}{81}$

(4) $a_{6k+1}=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{27}\right)^k\right\}$

4 (1) 証明は省略

(2) 最大値：$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

◇ 文系学部

1 (1) $(0,0)$ …… $\dfrac{1}{4}$，$(1,0)$ …… 0，$(1,1)$ …… $\dfrac{1}{8}$，$(2,0)$ …… $\dfrac{1}{16}$

(2) $\dfrac{9}{64}$

(3) 証明は省略

2 (1)
$$\begin{cases} k<2 \text{ のとき} & 0\text{ 個} \\ k=2 \text{ のとき} & 1\text{ 個} \\ k>2 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \end{cases}$$

(2) $f(x)=t^3-4t^2-3t+8$

(3) 最小値：-10　$\left(x=\log_2\left(\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)\right)$

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

(2) 証明は省略

(3) $M=\dfrac{1}{7}S$

4 (1) $S=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}t$

(2) $\mathrm{PH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}t$

(3) 最大値：$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　$\left(t=\dfrac{3}{2}\right)$