◀2014 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　a, b を実数とし，定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}(x-a-b\cos x)^2\,dx$ の値を $I(a, b)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　不定積分 $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ を求めよ．

(2)　不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めよ．

(3)　$I(a, b)$ を a, b を用いて表せ．

(4)　a, b が実数全体を動くときの $I(a, b)$ の最小値，および，$I(a, b)$ が最小値をとるときの a, b の値を求めよ．

2　$a>0, b>0$ とし，座標平面上の楕円 $K : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $\mathrm{B}\left(a\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right),\ b\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ のそれぞれにおける K の接線を ℓ, m とする．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とする．2 直線 ℓ と m の交点を $\mathrm{C}(c, d)$ とし，さらに 2 点 $\mathrm{D}\left(a\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right),\ 0\right)$, $\mathrm{E}(c, 0)$ をとる．台形 CBDE の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1)　c および d を a, b, θ を用いて表せ．

(2)　S を a, b, θ を用いて表せ．

(3)　θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの S の最大値，および，S が最大値をとるときの m の傾きを a, b を用いて表せ．

3　1 次変換 f は点 $(1, 3)$ を点 $(3, 5)$ へ，点 $(1, -1)$ を点 $(1, -1)$ へ移すとする．f を表す行列を A とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　A を求めよ．

(2)　A^2, A^3 を求めよ．

(3)　自然数 n に対して A^n を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ．

4　座標空間内に 4 点 $\mathrm{A}(0, -1, 0)$, $\mathrm{B}(2, t, 1-t)$, $\mathrm{C}(0, s, -1)$, $\mathrm{D}(3, 2, 1)$ がある．ただし，t と s は実数で $t>-1$ を満たし，また $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は垂直であるとする．次の問いに答えよ．

(1)　s を t を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直で大きさが 1 のベクトル $\vec{n}=(p, q, r)$ のうち $p>0$ となるものを t を用いて表せ．

(3)　4 点 A, B, C, D が同一平面に含まれるための必要十分条件は，$t=-\dfrac{1}{3}$ または $t=1$ であることを証明せよ．

♠ 文系学部

1　a, b を実数とする．2 次方程式 $x^2+2ax+b=0$ の 2 つの解を α, β とする．重解の場合は $\alpha=\beta$ と考える．次の問いに答えよ．

(1)　α, β が実数で，$|\alpha| \leqq 1$, $|\beta| \leqq 1$ を満たすとき，点 (a, b) の存在範囲を図示せよ．

(2)　α は虚数とし，$\alpha=p+qi$ とおく．ただし，p, q は実数であり，i は虚数単位である．p, q が $p^2+q^2 \leqq 1$ を満たすとき，点 (a, b) の存在範囲を図示せよ．

2　座標空間内に 4 点 A$(0,\ -1,\ 0)$, B$(2,\ 0,\ 1)$, C$(0,\ t,\ -1)$, D$(u,\ 2,\ 1)$ がある．ただし，t, u は実数であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は垂直であるとする．次の問いに答えよ．

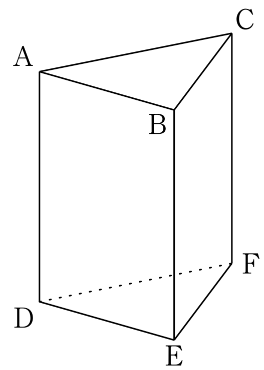
(1)　t の値を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直で大きさが 1 のベクトル $\vec{n}=(p,\ q,\ r)$ のうち $p>0$ となるものを求めよ．

(3)　4 点 A, B, C, D が同一平面に含まれるならば $u=4$ であることを示せ．

(4)　$u=3$ のとき四面体 ABCD の体積を求めよ．

3　図のような三角柱 ABC − DEF が中心 O，半径 1 の球に内接している．すなわち，三角柱の頂点 A, B, C, D, E, F はすべて，中心 O，半径 1 の球面上にある．また，三角形 ABC と三角形 DEF は合同な三角形で，四角形 ADEB, 四角形 BEFC，四角形 CFDA は合同な長方形であるとする．$\angle\mathrm{AOD}=2\alpha$, $\angle\mathrm{AOB}=2\beta$ とおく．ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{3}$ とする．次の問いに答えよ．



(1)　$\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}$ の値を求めよ．

(2)　三角柱 ABC − DEF の体積 V を α を用いて表せ．

(3)　V の最大値を求めよ．

4　3 個のさいころを同時に投げて得点を得るゲームをおこなう．3 個のさいころのうち，最も大きな目が出たさいころを 1 個だけ，最も小さな目が出たさいころを 1 個だけ，それぞれ取り除き，残った 1 個のさいころの目を C とする．とくに，3 個のさいころの目が一致するときは，その目が C である．$C\geqq 4$ ならば得点を C とし，$C\leqq 3$ ならば得点を 0 とする．次の問いに答えよ．

(1)　得点が 6 となる確率を求めよ．

(2)　得点が 5 となる確率を求めよ．

(3)　得点が 4 となる確率を求めよ．

(4)　得点の期待値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　III 積分法

2　やや難　II 三角関数・C いろいろな曲線

3　基本　C 行列・１次変換

4　標準　B ベクトル（空間）

♣ 文系学部

1　標準　I ２次関数・II 複素数と方程式・図形と方程式

2　標準　B ベクトル（空間）

3　標準　I 図形と計量・II 微分積分

4　標準　A 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$ （C は積分定数）

(2) $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C$ （C は積分定数）

(3) $I(a,\,b) = a^2\pi + \dfrac{b^2}{2}\pi - a\pi^2 + 4b + \dfrac{1}{3}\pi^3$

(4) 最小値：$\dfrac{\pi^3}{12} - \dfrac{8}{\pi}$，$\left(a = \dfrac{\pi}{2},\, b = -\dfrac{4}{\pi}\right)$

2 (1) $c = a(\cos\theta - \sin\theta)$，　$d = b(\cos\theta + \sin\theta)$

(2) $S = \dfrac{ab}{2}\cos\theta(2\cos\theta + \sin\theta)$

(3) 最大値：$\dfrac{(2+\sqrt{5})ab}{4}$，　m の傾き：$\dfrac{(\sqrt{5}-2)b}{a}$

3 (1) $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A^2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$，　$A^3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

(3) $A^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+1 & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n+1 \end{pmatrix}$，　証明は省略

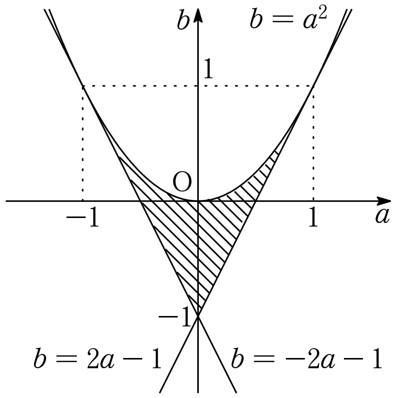
4 (1) $s = -\dfrac{2t}{t+1}$

(2) $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{t^4+4t^2+3}}(t^2+1,\,-(t+1),\,t-1)$

(3) 証明は省略

◇ 文系学部

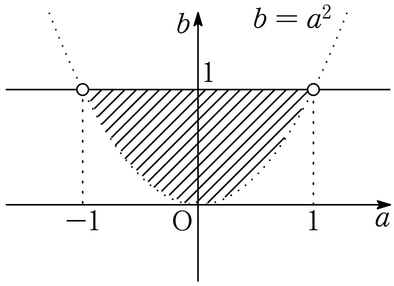
1 (1) $\begin{cases} -1 \leqq a \leqq 1 \\ b \leqq a^2 \\ b \geqq -2a-1 \\ b \geqq 2a-1 \end{cases}$　右上図の斜線部分で，境界線上の点を含む.



(2) $a^2 < b \leqq 1$

右下図の斜線部分で，境界線上の点は，$b = 1$ 上の点を含み，

放物線上の点は含まない.



2 (1) $t = 0$

(2) $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\ -1,\ -1)$

(3) 証明は省略

(4) $\dfrac{1}{3}$

3 (1) $\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cos^2\alpha\sin\alpha$

(3) 最大値：1

4 (1) $\dfrac{2}{27}$

(2) $\dfrac{5}{27}$

(3) $\dfrac{13}{54}$

(4) $\dfrac{7}{3}$