◀2013 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$p,\,q$ は実数で，$p \fallingdotseq 0$ を満たすものとする．

$$A=\begin{pmatrix} p & p-1 \\ -p & 1-p \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1-p & 1-p \\ p & p \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$A^2=A,\ B^2=B$ が成り立つことを示せ．

(2)　$AC=CA$ であるための必要十分条件は，$q=1-p$，すなわち $C=B$ であることを示せ．

(3)　$x,\,y$ を実数，n を自然数とするとき，$(xA+yB)^n=x^nA+y^nB$ が成り立つことを示せ．

2　座標平面の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲において，2 つの曲線 $y=\cos x$ と $y=\sin 2x$ の交点の座標を $(a,\,b)$ とし，2 つの曲線 $y=\cos x$ と $y=\tan x$ の交点の座標を $(c,\,d)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$a,\,b$ および d^2 の値を求めよ．

(2)　$c>a$ であることを示せ．

(3)　連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4},\quad \cos x \leqq y \leqq \sin 2x,\quad y \geqq \tan x$$

の表す領域を図示し，その領域の面積を求めよ．

3　$a>1$ を満たす定数 a に対し，座標が $(a,\,a)$ である点を A とする．関数 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ のグラフ上を動く点 $\mathrm{P}\left(t,\,\dfrac{1}{t}\right)$ をとり，$t>0$ で定義された関数 $f(t)$ を，長さ AP を用いて $f(t)=\mathrm{AP}^2$ で定める．次の問いに答えよ．

(1)　$f(t)$ を t と a を用いて表せ．

(2)　$f'(t)=0$ となる $t\ (t>0)$ の値を求めよ．

(3)　AP が最小になるような点 P の座標と，AP の最小値を求めよ．

4　$\mathrm{OA}=4,\ \mathrm{OB}=5$ である三角形 OAB に対し，$k=\mathrm{AB},\ \vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を k を用いて表せ．

(2)　$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線と辺 AB の交点を P，$\angle\mathrm{OAB}$ の二等分線と辺 OB の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $k,\ \vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ．

(3)　三角形 OAB の内心を I とする．$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $k,\ \vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ．

(4)　(3) の I と直線 OA 上の点 H に対して，$\mathrm{IH}\perp\mathrm{OA}$ が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{IH}}$ を $k,\ \vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ．

♠ 文系学部

1　放物線 $C_1 : y=2x^2$ と放物線 $C_2 : y=(x-a)^2+b$ を考える．ただし，$a,\,b$ は定数で，$a>0$ とする．放物線 C_1 と C_2 がともにある点 P を通り，点 P において共通の接線 ℓ をもつとする．また，点 P で ℓ と直交する直線を m とし，m と放物線 $C_1,\,C_2$ との P 以外の交点を，それぞれ Q, R とする．次の問いに答えよ．

(1)　b を a を用いて表せ．

(2)　直線 m の方程式，および，点 Q，点 R の x 座標を a を用いて表せ．

(3)　$a=\dfrac{1}{4}$ のとき，放物線 C_1 と直線 m で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

2　$f(x)=4x^2+2x+4,\ g(x)=x^2-x+1$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　すべての実数 x に対して $f(x)>0,\ g(x)>0$ が成り立つことを示せ．

(2)　不等式 $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}<\log_a(2a+1)$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ．ただし $a>0,\ a \fallingdotseq 1$ とする．

3　$\mathrm{OA}=4,\ \mathrm{OB}=5,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{5}{2}$ である三角形 OAB に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　辺 AB の長さを求めよ．

(2)　$\angle$AOB の二等分線と辺 AB の交点を P，$\angle$OAB の二等分線と辺 OB の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ．

(3)　三角形 OAB の内心を I とする．$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ．

4　点 P は数直線上を動くものとする．1 個のさいころを投げて，奇数の目が出たときには P は正の向きに 1 だけ進み，偶数の目が出たときには P は正の向きに 2 だけ進む．n を自然数とする．さいころを続けて投げて，出発点から P が進んだ距離が n 以上になったら，そこでさいころを投げるのをやめるものとする．このときに，出発点から P が進んだ距離がちょうど n である確率を a_n とする．また，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ．

(2)　a_{n+2} を $a_{n+1},\ a_n$ を用いて表せ．

(3)　b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(4)　$b_n,\ a_n$ を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　C 行列

2　標準　III 微分法の応用・積分法の応用

3　やや難　III 微分法の応用

4　標準　B ベクトル（平面）

♣ 文系学部

1　標準　II 微分積分

2　標準　II 指数関数・対数関数

3　基本　B ベクトル（平面）

4　標準　A 確率・B 数列

略解

◇ 理系学部

1
（1） 証明は省略

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

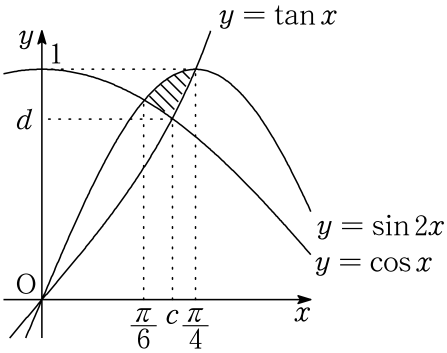
2
（1） $a=\dfrac{\pi}{6}$，　$b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$d^2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

（2） 証明は省略

（3） 連立不等式が表す領域は右図斜線部分で，

境界線上の点を含む.

$\dfrac{5}{4}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\log(-1+\sqrt{5})$



3
（1） $f(t)=t^2-2at+2a^2-\dfrac{2a}{t}+\dfrac{1}{t^2}$

（2） $\begin{cases} 1<a\leqq 2 \text{ のとき，} & t=1 \\ 2<a \text{ のとき，} & t=1,\ \dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2} \end{cases}$

（3） $\begin{cases} 1<a\leqq 2 \text{ のとき，} & \text{最小値：}\sqrt{2}(a-1),\quad \mathrm{P}(1,\ 1) \\ 2<a \text{ のとき，} & \text{最小値：}\sqrt{a^2-2},\quad \mathrm{P}\left(\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2},\ \dfrac{a\mp\sqrt{a^2-4}}{2}\right) \end{cases}$ （複号同順）

4
（1） $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{41-k^2}{2}$

（2） $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{4}{k+4}\vec{b}$

（3） $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{5}{k+9}\vec{a}+\dfrac{4}{k+9}\vec{b}$

（4） $\overrightarrow{\mathrm{IH}}=\dfrac{41-k^2}{8(k+9)}\vec{a}-\dfrac{4}{k+9}\vec{b}$

◇ 文系学部

1 (1) $b=-2a^2$

(2) 直線 $m: y=\dfrac{1}{4a}x+2a^2+\dfrac{1}{4}$，点 Q の x 座標は，$a+\dfrac{1}{8a}$，点 R の x 座標は，$3a+\dfrac{1}{4a}$

(3) $S=\dfrac{1}{3}$

2 (1) 証明は省略

(2) $0<a<\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{9}{2}<a$

3 (1) $\mathrm{AB}=6$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{5}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{15}\vec{b}$

4 (1) $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{3}{4}$，$a_3=\dfrac{5}{8}$

(2) $a_{n+2}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n$

(3) $b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}b_n$

(4) $b_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$，$a_n=\dfrac{1}{3}\left\{2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$