◀2011 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　a は実数で $0 < a < 1$ とする．座標平面上の第 1 象限にある曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ と 2 直線 $y = x,\ y = ax$ で囲まれる部分 $P(a)$ の面積を $S(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$S(a)$ を a を用いて表せ．

(2)　$2S\left(\dfrac{1}{e}\right) \leqq S(a) \leqq 2S\left(\dfrac{1}{e}\right) + 1$ となる a の範囲を求めよ．

(3)　$P(a)$ を x 軸の周りに回転して得られる回転体の体積 $V(a)$ と $\displaystyle\lim_{a \to 0} V(a)$ を求めよ．

2　実数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　n を正の整数とするとき，B^n を求めよ．

(2)　$AP = PB$ が成り立つように，$b,\ p,\ q$ の値を求めよ．

(3)　n を正の整数とするとき，A^n を求めよ．

3　$p,\ q$ は正の実数で $p > q$ とする．$x > 0$ において，2 つの関数 $f(x) = e^{px} + e^{-px}$，$g(x) = e^{qx} + e^{-qx}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1)　$f(x) > 2$ を示せ．

(2)　$f(x) > g(x)$ を示せ．

(3)　$h(x) = \dfrac{f'(x) - g'(x)}{f(x) - g(x)}$ とするとき，$h(x)$ は $x > 0$ において単調減少であることを示せ．

4　$N,\ a,\ b$ は正の整数とする．箱の中に赤玉が a 個，白玉が b 個入っている．箱から無作為に 1 個の玉を取り出し，色を記録して箱に戻す．この操作を繰り返し，同じ色の玉が 2 回続けて出るか，または取り出す回数が $2N + 2$ になったら終了する．n 回取り出して終わる確率を $P(n)$ とし，$p = \dfrac{a}{a+b},\ q = \dfrac{b}{a+b},\ r = pq$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$P(2j)$，$P(2j+1)\ (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ および $P(2N+2)$ を r を用いて表せ．

(2)　$(1-r)\displaystyle\sum_{j=1}^{N} jr^{j-1} = \dfrac{1-r^N}{1-r} - Nr^N$ を示せ．

(3)　取り出す回数の期待値 $m = \displaystyle\sum_{n=2}^{2N+2} nP(n)$ について，$m < \dfrac{2+r}{1-r}$ となることを示せ．

(4)　上の期待値 m について，$m < 3$ を示せ．

♠ 文系学部

1　座標平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は $p^2 + q^2 > 1$ をみたすものとする．P から C へ接線をひき，その接点を $\mathrm{T}(s,\ t)$ とする．P を中心とし T を通る円を D として，D は点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を通るものとする．次の問いに答えよ．

(1)　$(a-p)^2 = p^2 - 1$ であることを示せ．

(2)　$0 < a < 1$ のとき $p > 1$ であることを示し，a を p を用いて表せ．

2　座標空間を運動する 3 点 A, B, C の時刻 t における座標をそれぞれ $(t,\ 0,\ t)$, $\left(\sqrt{2}t,\ 1-2t,\ \sqrt{2}(1-t)\right)$, $\left(-t,\ -\sqrt{2}t,\ t\right)$ とする．原点を O と記すとき，次の問いに答えよ．ただし，$0<t<\dfrac{1}{2}$ とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を示せ．

(2)　$\triangle$OAB の面積 $S(t)$ は $t(1-2t)$ であることを示せ．

(3)　四面体 OABC の体積 $V(t)$ の $0<t<\dfrac{1}{2}$ における最大値を求めよ．

3　$s,\ t$ を実数とし，座標平面上の 4 点 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$, P$(0,\ t)$, Q$(s,\ t)$ を考える．次の問いに答えよ．

(1)　不等式

$$\sqrt{(1+s)^2+t^2} \geqq \frac{1+t^2+s}{\sqrt{1+t^2}}$$

が成り立つことを示せ．

(2)　不等式

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB} \leqq \mathrm{QA}+\mathrm{QB}$$

が成り立つことを示せ．

4　$N,\ a,\ b$ は正の整数とする．箱の中に赤玉が a 個，白玉が b 個入っている．箱から無作為に 1 個の玉を取り出し，色を記録して箱に戻す．この操作を繰り返し，同じ色の玉が 2 回続けて出るか，または取り出す回数が $2N+2$ になったら終了する．n 回取り出して終わる確率を $P(n)$ とし，$p=\dfrac{a}{a+b}$, $q=\dfrac{b}{a+b}$, $r=pq$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$P(2j)$，$P(2j+1)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ および $P(2N+2)$ を r を用いて表せ．

(2)　偶数回取り出して終わる確率 $Q=\displaystyle\sum_{j=1}^{N+1} P(2j)$ について，$Q>\dfrac{1-2r}{1-r}$ となることを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　III　積分法の応用
- **2**　標準　C　行列
- **3**　やや難　III　微分法の応用
- **4**　やや難　A　確率

♣ 文系学部

- **1**　標準　II　図形と方程式
- **2**　標準　B　ベクトル（空間）
- **3**　標準　II　図形と方程式
- **4**　やや難　A　確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $S(a)=-\dfrac{1}{2}\log a$

(2) $\dfrac{1}{e^4}\leqq a\leqq\dfrac{1}{e^2}$

(3) $V(a)=\dfrac{4}{3}\pi(1-\sqrt{a})$, $\displaystyle\lim_{a\to 0}V(a)=\dfrac{4}{3}\pi$

2 (1) $b=0$ かつ $n=1$ のとき，$B^n=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

「$b\neq 0$」または，「$b=0$ かつ $n\geqq 2$」のとき，$B^n=\begin{pmatrix}b^n & nb^{n-1}\\ 0 & b^n\end{pmatrix}$

(2) $b=2$, $p=1$, $q=2$

(3) $A^n=2^{n-1}\begin{pmatrix}2-n & n\\ -n & 2+n\end{pmatrix}$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4 (1) $P(2j)=r^{j-1}(1-2r)$, $P(2j+1)=r^j$, $P(2N+2)=r^N$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略

◇ 文系学部

1 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略．$a=p-\sqrt{p^2-1}$

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $\dfrac{2}{81}$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

4 (1) $P(2j)=r^{j-1}(1-2r)$, $P(2j+1)=r^j$, $P(2N+2)=r^N$

(2) 証明は省略