◀2009 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x \geqq \dfrac{2}{\pi} x$ であることを示せ．

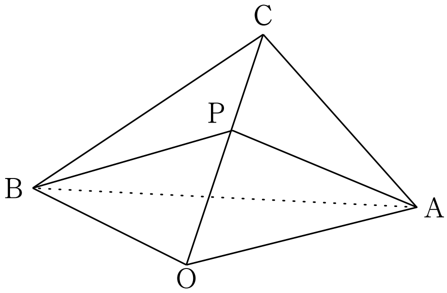
(2) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n \sin x}\, dx = 0$$

2 四面体 OABC において，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$$

とする．$0 \leqq t \leqq 1$ なる実数 t に対して，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{c}$ により定める．三角形 ABP の面積を $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ．



(1) $S(0)$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $S(1)$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\mathrm{O} = (0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A} = (1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B} = (0,\ 1,\ 0),\ \mathrm{C} = (1,\ 1,\ 1)$ とするとき，$0 \leqq t \leqq 1$ において $S(t)$ が最小となる t を求めよ．

3 xy 平面の原点を O とする．xy 平面上の O と異なる点 P に対し，直線 OP 上の点 Q を，次の条件 (a), (b) を満たすようにとる．

(a)　$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 4$

(b)　Q は，O に関して P と同じ側にある．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P が直線 $x = 1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めて，図示せよ．

(2) $a > r > 0$ とする．点 P が円 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡が円であることを示し，その中心の座標と半径を求めよ．

4 一般に 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\Delta(A) = ad - bc$ と表すことにする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 2 次の正方行列 A, B に対して，

$$\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 自然数 n に対して，

$$\Delta(A^n) = \Delta(A)^n$$

が成り立つことを示せ．

(3) n は正の偶数とする．実数を成分とする 2 次の正方行列 A で

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たすものは存在しないことを示せ．

(4)　n は正の奇数とする．実数を成分とする 2 次の正方行列 A で

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たすものを 1 つ求めよ．

♠ 文系学部

1　実数 t に対して，放物線 $y = x^2 + 1$ の点 $\mathrm{A}(t,\ t^2 + 1)$ における接線を ℓ_1 とし，また点 B $(t+1,\ (t+1)^2 + 1)$ における接線を ℓ_2 とする．ℓ_1 と ℓ_2 の交点を P とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　ℓ_1 と ℓ_2 の方程式および P の座標を求めよ．

(2)　この放物線と ℓ_1, ℓ_2 で囲まれる部分の面積は t によらないことを示せ．

(3)　$\mathrm{AB}^2 + 2\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2$ が最小となるような t の値を求めよ．

2　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，

$$\frac{n(n+1)}{2} b_n = a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \cdots + na_1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

という関係を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　n は 2 以上の自然数とする．このとき，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n, b_n, b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　$\{b_n\}$ が初項 $b_1 = p$，公差 q の等差数列であるとき，a_n を n, p, q を用いて表せ．

3　xy 平面の原点を O とする．xy 平面上の O と異なる点 P に対し，直線 OP 上の点 Q を，次の条件 (a), (b) を満たすようにとる．

(a)　$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 4$

(b)　Q は，O に関して P と同じ側にある．

点 P が直線 $x = 1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めて，図示せよ．

4　n は 0 または自然数とする．「右」と書かれたカードを 1 枚,「左」と書かれたカードを 1 枚，無地のカードを n 枚用意する．数直線上で点 P は原点 O を出発点とし，これら $n+2$ 枚のカードの中から無作為に 1 枚引き，そのカードが「右」のカードであれば右へ 1 だけ移動し,「左」のカードであれば左へ 1 だけ移動することとし，無地のカードであればそのまま動かないこととする．ただし，カードは，1 回引くたびに元に戻すこととする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　カードを 2 回引いた時点で，点 P が原点にある確率を求めよ．

(2)　(1) の確率が最小となる n を求めよ．

(3)　カードを 4 回引いた時点で，点 P が原点にある確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 |標準| III 積分法の応用

2 |標準| B ベクトル（空間）

3 |標準| II 図形と方程式

4 |標準| C 行列

♣ 文系学部

1 |標準| II 微分積分

2 |標準| B 数列

3 |標準| II 図形と方程式

4 |やや難| A 確率・B 数列

略解

◇ 理系学部

1 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

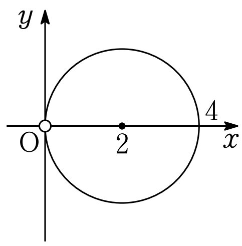
2 （1） $S(0)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$

（2） $S(1)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}-\vec{c}\right|^2\left|\vec{b}-\vec{c}\right|^2-\left\{\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\right\}^2}$

（3） $t=\dfrac{1}{3}$

3 （1） 円：$(x-2)^2+y^2=4$ かつ $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

軌跡を図示すると右図のようになる．



（2） 証明は省略．中心 $\left(\dfrac{4a}{a^2-r^2},\ 0\right)$， 半径 $\dfrac{4r}{a^2-r^2}$

4 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

（4） $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

◇ 文系学部

1 （1） $\ell_1: y=2tx-t^2+1$，　$\ell_2: y=2(t+1)x-t^2-2t$

$\mathrm{P}\left(t+\dfrac{1}{2},\ t^2+t+1\right)$

（2） 証明は省略

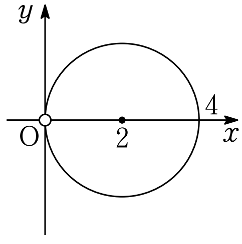
（3） $t=-\dfrac{3}{7}$

2 （1） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(n+1)}{2}b_n-\frac{(n-1)n}{2}b_{n-1}$

（2） $a_n=3qn+p-3q$

3 円：$(x-2)^2+y^2=4$ かつ $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

軌跡を図示すると右図のようになる．



4 （1） $\dfrac{n^2+2}{(n+2)^2}$

（2） $n=1$

（3） $\dfrac{n^4+12n^2+6}{(n+2)^4}$