◀2004 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　自然数 n に対して

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$$

とおく．ただし，e は自然対数の底である．

(1)　次の関係式が成り立つことを示せ．

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

(2)　次の等式を示せ．

$$I_n = \frac{n!}{e}\left(e - 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)$$

2　$x>0$ の範囲で，関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ を考える．

(1)　$f(x)$ は，$0<x \leqq \pi$ において減少することを示せ．

(2)　n を自然数とする．$f(x)$ が極小値，極大値をとる x のうちで，$(2n-1)\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ をみたすものが，それぞれちょうど 1 つずつ存在することを示せ．

(3)　$f(x)$ が極値をとる x の値を小さい方から順に，

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad \cdots\cdots\ (0<x_1<x_2<x_3<\cdots\cdots)$$

とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos x_n = 0$ を示せ．

3　2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$s=-(a+d)$, $t=ad-bc$ とおく．$P=\begin{pmatrix} p & x \\ q & y \end{pmatrix}$ について，$AP=P\begin{pmatrix} 0 & -t \\ 1 & -s \end{pmatrix}$ となるための必要十分条件は，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ であることを示せ．

4　xy 平面上の 3 点 O$(0,\,0)$, A$(1,\,-t)$, B$(0,\,-t)$ $\left(0<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ に対し，y 軸上に，B, O, C, D の順に並ぶ点C, Dを $\angle$BAO $=$ $\angle$OAC $=$ $\angle$CADとなるようにとる．また，線分BA上の点Eを3$\angle$BDE $=$ $\angle$BDAとなるようにとる．

(1)　直線 AC の方程式を求めよ．

(2)　直線 DE の方程式を求めよ．

(3)　直線 AC と直線 DE の交点を P$(x_1,\,y_1)$ とするとき，$\dfrac{y_1}{x_1}$ の値を求めよ．

♠ 文系学部

1　関数 $f(x)=x^3+px^2+qx$ (p, q は定数) は，$x=a$, $x=b$ $(0<a<b)$ で極値をとるとする．また，曲線 $y=f(x)$ 上の 3 点 O$(0,\,0)$, A$(a,\,f(a))$, B$(b,\,f(b))$ に対して，$\angle$ AOB が x 軸によって 2 等分されているものとする．

(1)　$\dfrac{f(a)}{a} = -\dfrac{f(b)}{b}$ を示せ．

(2)　$p^2=6q$ を示せ．

(3)　$\dfrac{b}{a}$ の値を求めよ．

2　実数 a, b, c に対して，$x = a + b + c,\ y = a^2 + b^2 + c^2,\ z = abc,\ w = a^4 + b^4 + c^4$ とおく．

(1)　$ab + bc + ca$ を，x, y を用いて表せ．

(2)　$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ を，x, y, z を用いて表せ．

(3)　$x = 1,\ z = 1,\ w = 35$ のとき，y の値を求めよ．

3　2 つの複素数 $\alpha = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$，$\beta = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$ の偏角 θ_1, θ_2 は，$0^\circ < \theta_1 < 180^\circ < \theta_2 < 360^\circ$ をみたすものとする．ただし，i は虚数単位を表す．

(1)　$\alpha + 1$ を極形式で表せ．

(2)　$\dfrac{1}{\alpha + 1}$ の実部の値を求めよ．

(3)　$\dfrac{\alpha + 1}{\beta + 1}$ の実部が 0 に等しいことは，$\beta = -\alpha$ であるための必要十分条件であることを示せ．

4　1 個のさいころを投げ，出た目が 3 か 6 のとき持ち点に 1 を加え，それ以外のときは 1 だけ減らすことを繰り返すゲームをする．はじめの持ち点を 2 とし，持ち点が 0 または n になればゲームは終了するものとする．

(1)　$n = 3$ とする．ちょうど 5 回投げたときに，ゲームが終了する確率を求めよ．

(2)　$n = 4$ とする．ちょうど 6 回投げたときに，ゲームが終了する確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　III　積分法

2　標準　III　数列の極限

3　標準　C　行列

4　標準　II　三角関数

♣ 文系学部

1　標準　II　微分積分

2　標準　A　式の値

3　標準　B　複素数と複素数平面

4　標準　I　確率

略解

◇ 理系学部

1 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

2 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

3 証明は省略

4 （1） $y=\dfrac{2t}{t^2-1}x-\dfrac{t(t^2+1)}{t^2-1}$

（2） $y=\dfrac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}t-1}x+\dfrac{2t(t^2+1)}{1-3t^2}$

（3） $\dfrac{y_1}{x_1}=\sqrt{3}$

◇ 文系学部

1 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

（3） $\dfrac{b}{a}=3+2\sqrt{2}$

2 （1） $ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}(x^2-y)$

（2） $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\dfrac{1}{4}(x^2-y)^2-2zx$

（3） $y=7$

3 （1） $\alpha+1=2\cos\dfrac{\theta_1}{2}\left(\cos\dfrac{\theta_1}{2}+i\sin\dfrac{\theta_1}{2}\right)$

（2） $\dfrac{1}{2}$

（3） 証明は省略

4 （1） $\dfrac{4}{243}$

（2） $\dfrac{80}{729}$