◀2003 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 　正の実数 x に対して，$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とする．

(1)　関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2)　自然数 $a,\ b$ で，$a < b$ かつ $a^b = b^a$ となるものをすべて求めよ．

2 　空間に 4 点 A$(-2,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 2,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ 2)$, D$(2,\ -1,\ 0)$ がある．3 点 A, B, C を含む平面を T とする．

(1)　点 D から平面 T に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(2)　平面 T において，3 点 A, B, C を通る円 S の中心の座標と半径を求めよ．

(3)　点 P が円 S の周上を動くとき，線分 DP の長さが最小になる P の座標を求めよ．

3 　$p,\ q$ は正の有理数で，$\sqrt{q}$ は無理数であるとする．自然数 n に対し，有理数 $a_n,\ b_n$ を

$$(p + \sqrt{q})^n = a_n + b_n\sqrt{q}$$

によって定める．

(1)　$(p - \sqrt{q})^n = a_n - b_n\sqrt{q}$ を示せ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{q}$ を示せ．

4 　実数 $a,\ b$ と自然数 n に対して

$$I_n = \int_0^{2\pi} (a\cos x + b\sin x)^{2n}\,dx$$

$$J_n = \int_0^{2n} (\sin x)^{2n}\,dx$$

とおく．

(1)　$I_n = (a^2 + b^2)^n J_n$ を示せ．

(2)　J_n と J_{n-1} $(n \geqq 2)$ の関係式を求め，I_n を求めよ．

♠ 文系学部

1 　実数 $a,\ b$ に対し，x についての 2 次方程式 $x^2 - 2ax + b = 0$ は，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に少なくとも一つ実数解をもつとする．このとき，$a,\ b$ がみたす条件を求め，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

2 　自然数 n に対して，$a_n = 2^n + 1$ とする．

(1)　すべての自然数 m に対して，$a_{3m+1} - a_1$ は 7 で割り切れることを証明せよ．

(2)　a_n を 7 で割った余りを求めよ．

3 　$a \geqq 0$ とする．

(1)　$S(a) = \displaystyle\int_0^1 \left| x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a \right| dx$ を求めよ．

(2)　$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ．

4　複素数平面において，点 P(z) を原点 O のまわりに θ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ だけ回転し，さらに点 E(1) のまわりに θ だけ回転した点を Q(w) とする．このとき，点 Q(w) は点 P(z) をある点 A(α) のまわりに 2θ だけ回転した点と一致する．ただし，回転はすべて反時計まわりとする．複素数 γ を

$$\gamma = \cos\theta + i\sin\theta$$

とする．

(1)　複素数 w を z と γ を用いて表せ．

(2)　複素数 α を γ を用いて表せ．

(3)　三角形 OEA が正三角形となるような θ の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法
- **2**　標準　$\boxed{\text{B}}$ ベクトル（空間）
- **3**　標準　$\boxed{\text{III}}$ 数列の極限
- **4**　標準　$\boxed{\text{III}}$ 積分法

♣ 文系学部

- **1**　標準　$\boxed{\text{I}}$ 2次関数・$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式
- **2**　標準　$\boxed{\text{A}}$ 整数問題
- **3**　標準　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分
- **4**　標準　$\boxed{\text{B}}$ 複素数と複素数平面

略解

◇ 理系学部

1 (1) 増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

極大値 $\dfrac{1}{e}$ $(x=e)$

(2) $(a,b)=(2,4)$

2 (1) $\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

(2) 中心の座標：$\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，半径：$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

(3) $\mathrm{P}\left(\dfrac{-2+2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}\right)$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

4 (1) 証明は省略

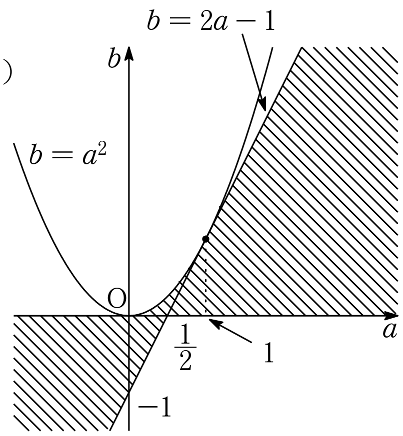
(2) $J_n=\dfrac{2n-1}{2n}J_{n-1}$,　$I_n=\dfrac{(a^2+b^2)^n(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}$

◇ 文系学部

1

$$\begin{cases} a \leqq 0 \text{ のとき}, & 2a-1 \leqq b \leqq 0 \\ 0<a<1 \text{ のとき}, & b \leqq a^2 \text{ かつ } (b \geqq 0 \text{ または } b \geqq 2a-1) \\ a \geqq 1 \text{ のとき}, & 0 \leqq b \leqq 2a-1 \end{cases}$$

右図斜線部分で境界線上の点は含む．



2 (1) 証明は省略

(2) k を自然数として

$$\begin{cases} 3 & (n=3k-2) \\ 5 & (n=3k-1) \\ 2 & (n=3k) \end{cases}$$

3 (1)

$$S(a)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}a^3+a^2-a+\dfrac{2}{3} & (0 \leqq a \leqq 1) \\ a^2+a-\dfrac{2}{3} & (a \geqq 1) \end{cases}$$

(2) $a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

4 (1) $w=\gamma^2 z-\gamma+1$

(2) $\alpha=\dfrac{1}{1+\gamma}$

(3) $\theta=120^\circ$