◀2000 年　大阪市立大学（前期）▶

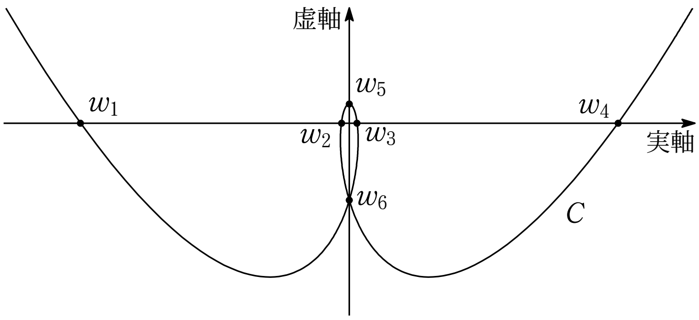
♠ 理系学部

1　次の問いに答えよ．

(1)　自然数 a, b, c, d に $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{a}+d$ の関係があるとき，a と c が互いに素であれば，a と b も互いに素であることを証明せよ．

(2)　任意の自然数 n に対し，$28n+5$ と $21n+4$ は互いに素であることを証明せよ．

2　複素数平面において，点 i を通り，実軸に平行な直線を L とする．ただし，i は虚数単位とする．複素数 z が直線 L 上を動くとき，複素数 $w=iz^4$ は右図の曲線 C 上を動く．ここで，w_1, w_2, w_3, w_4 は実数で，w_5, w_6 は純虚数である．いま，z が L 上を右から左の方向に動くとき，複素数 $w=iz^4$ は，曲線 C 上の点 $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ をどの順序で通過して動くかを説明せよ．また，複素数 w_1 と w_6 の値を求めよ．



3　実数 a は $0<a<4$ をみたすとする．座標平面において，2 曲線 $C_1：y=\sqrt{a}\cos x$ と $C_2：y=\sin 2x$ の交点で，その x 座標が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ となるものを P とする．点 P において，C_1 の接線と C_2 の接線のなす角を $\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\tan\theta$ を a で表せ．

(2)　a が $0<a<4$ の範囲を動くとき，θ が最大になるような a の値を求めよ．

4　自然数 p, n に対し，座標平面において，曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^p$ と 2 直線 $y=0,\ x=2n$ で囲まれた部分（境界も含む）に含まれている格子点の個数を $L_p(n)$ とする．ここで，格子点とは x 座標，y 座標がともに整数の点である．次の問いに答えよ．

(1)　$L_p(n)=1+\dfrac{3}{2}n+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}k^p$ であることを示せ．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_p(n)}{n^{p+1}}$ を求めよ．

♠ 文系学部

1　平面上の原点を始点とするベクトルの列 $\vec{v_0}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots$ は，任意の自然数 n に対し，関係式

$$\vec{v_n}=\vec{v_{n-1}}+\vec{v_1}-\vec{v_0}$$

をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1)　$\vec{v_n}$ を $\vec{v_0}$ と $\vec{v_1}$ の式で表せ．

(2)　$\vec{v_0}=(1,\ 0),\ \vec{v_1}=(0,\ 1)$ のとき，$\vec{v_0}$ と $\vec{v_n}$ のなす角は 135° より小さいことを示せ．

2　座標平面において，2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2),\ \mathrm{Q}(q,\ q^2)$ を通る直線と放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を S とする．ただし，$q<p$ とする．$a=p-q,\ b=p+q$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　S を a で表せ．

(2)　線分 PQ の長さが 1 であるとき，S を b で表せ．

(3)　2 点 P, Q が (2) の条件をみたしながら動くとき，S の最大値を求めよ．

3　実数の定数 $a, b\,(b>0)$ に対し，2 次方程式 $x^2-2ax-b=0$ と 3 次方程式 $x^3-(2a^2+b)x-4ab=0$ を考える．この 2 次方程式の解のうちの 1 つだけが，この 3 次方程式の解になるための必要十分条件を a と b の関係式で表せ．また，その共通な解を a で表せ．

4　さいころを投げたとき，3 の目が出れば得点は -3，その他の目が出れば得点はその目の数とする．さいころを 4 回投げたとき，次の問いに答えよ．

(1)　得点の和が 0 となる確率を求めよ．

(2)　得点の和が正となる確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　A　整数問題

2　標準　B　複素数と複素数平面

3　標準　III　微分法の応用

4　標準　III　数列の極限・積分法の応用

♣ 文系学部

1　標準　B　ベクトル（平面）

2　標準　II　微分積分

3　標準　II　高次方程式

4　標準　I　確率

略解

◇ 理系学部

1 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

2　$w_1 \to w_6 \to w_3 \to w_5 \to w_2 \to w_6 \to w_4$ の順に通過していく．

$w_1 = -24 - 16\sqrt{2},\quad w_6 = -4i$

3 (1)　$\tan\theta = \dfrac{4-a}{a^2-2a+2}$

(2)　$a = 4-\sqrt{10}$

4 (1)　証明は省略

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}$

◇ 文系学部

1 (1)　$\overrightarrow{v_n} = (1-n)\overrightarrow{v_0} + n\overrightarrow{v_1}$

(2)　証明は省略

2 (1)　$S = \dfrac{a^3}{6}$

(2)　$S = \dfrac{1}{6\left(\sqrt{b^2+1}\right)^3}$

(3)　最大値：$\dfrac{1}{6}$

3　$b = 3a^2$

共通解：$3a$

4 (1)　$\dfrac{7}{324}$

(2)　$\dfrac{1211}{1296}$