◀2017 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　双曲線 $H : x^2 - y^2 = 1$ 上の 3 点 $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$, $\mathrm{C}(s, t)$ $(t \neq 0)$ を考える．

(1)　点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標を s と t を用いてあらわせ．

(2)　点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標を s と t を用いてあらわせ．

(3)　点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ．

2　複素数 z は $z^5 = 1$ を満たし，実部と虚部がともに正であるものとする．硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順に a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 とおく．複素数 w を $w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$ と定める．

(1)　5 回とも表が出たとする．w の値を求めよ．

(2)　$a_0 = a_2 = a_3 = 0$, $a_1 = a_4 = 1$ のとき，$|w| < 1$ であることを示せ．

(3)　$|w| < 1$ である確率を求めよ．

3　a, b を自然数とし，不等式

$$\left|\frac{a}{b} - \sqrt{7}\right| < \frac{2}{b^4} \qquad \text{(A)}$$

を考える．次の問いに答えよ．ただし，$2.645 < \sqrt{7} < 2.646$ であること，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい．

(1)　不等式 (A) を満たし $b \geqq 2$ である自然数 a, b に対して

$$\left|\frac{a}{b} + \sqrt{7}\right| < 6$$

であることを示せ．

(2)　不等式 (A) を満たす自然数 a, b の組のうち，$b \geqq 2$ であるものをすべて求めよ．

4　b, c を実数とする．2 次関数 $f(x) = -x^2 + bx + c$ が

$$0 \leqq f(1) \leqq 2, \quad 5 \leqq f(3) \leqq 6$$

を満たすとする．

(1)　$f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)　放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

5　xy 平面上で放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく．回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x = 1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく．

(1)　t を $0 \leqq t \leqq 2$ を満たす実数とする．xy 平面上の点 $(0, t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする．$t = (2\cos\theta)^2 \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いてあらわせ．

(2)　M の体積 V を求めよ．

♠ 文系学部

1　b, c を実数，q を正の実数とする．放物線 $P: y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q のとき，放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ．

2　実数 x, y, z が

$$x+y+z=1, \quad x+2y+3z=5$$

を満たすとする．

(1)　$x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ．

(2)　$z \geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ．

3　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1=2, \quad a_{n+1}=8{a_n}^2 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

(1)　$b_n=\log_2 a_n$ とおく．b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　$P_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$ とおく．数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ．

(4)　$P_n>10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　|分析中|　$\boxed{\text{III}}$ 2次曲線

2　|分析中|　$\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{III}}$ 複素数平面

3　|分析中|　$\boxed{\text{A}}$ 整数の性質

4　|分析中|　$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式・微分積分

5　|分析中|　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用

♣ 文系学部

1　|分析中|　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分

2　|分析中|　$\boxed{\text{I}}$ 2次関数・$\boxed{\text{II}}$ 微分積分

3　|分析中|　$\boxed{\text{II}}$ 対数関数・$\boxed{\text{B}}$ 数列

注: 出題範囲は分析中のため変更される場合があります．