◀2015 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right) \quad (x \geqq 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$ を示せ．

(2)　数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_0^n f_n(x)\,dx$$

で定める．$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $\log(1+x) \leqq \log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ であることは用いてよい．

2　実数 $x,\ y$ が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ．

3　以下の問いに答えよ．

(1)　$\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ．

(2)　$p,\ q,\ \sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする．そのとき，$p = q = 0$ であることを示せ．

4　座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある．P, Q は時刻 0 において，原点を出発する．P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く．その後，ともに時刻 1 で停止する．点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ $A,\ B$ とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　時刻 $t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ．

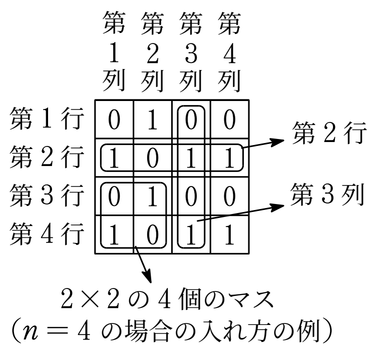
(2)　$V(t)$ の最大値を求めよ．

5　n を 2 以上の整数とする．正方形の形に並んだ $n \times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる．マスは上から第 1 行，第 2 行，…，左から第 1 列，第 2 列，…，と数える．数字の入れ方についての次の条件 p を考える．

条件 p：1 から $n-1$ までのどの整数 $i,\ j$ についても，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る．

(1)　条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ．

(2)　条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ．



（$n=4$ の場合の入れ方の例）

♠ 文系学部

1　理系学部 **2** と同じ.

2　直線 $\ell : y = kx + m \ (k > 0)$ が円 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と放物線 $C_2 : y = -\frac{1}{2}x^2$ の両方に接している．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　k と m を求めよ．

(2)　直線 ℓ と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

3　平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある．2 点 A, B を除く C 上の点 P に対し，AP = AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる．また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　△AQR の面積を $\theta = \angle\mathrm{PAB}$ を用いて表せ．

(2)　点 P を動かして △AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　やや難　III 関数の極限・積分法の応用

2　標準　II 不等式の証明・三角関数

3　標準　A 命題と論証

4　標準　III 積分法の応用

5　難　A 論証・B 数列

♣ 文系学部

1　標準　II 不等式の証明・三角関数

2　標準　II 図形と方程式・微分積分

3　標準　II 三角関数・B ベクトル（平面）

略解

◇ 理系学部

1 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略．$2\log 2-1$

2 証明は省略

3 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

4 （1） $V(t)=\left(-\dfrac{1}{3}t^3-t^2+2t+\dfrac{4}{3}\right)\pi$

（2） 最大値：$\left(2\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\right)\pi$　$(t=\sqrt{3}-1)$

5 （1） 証明は省略

（2） $a_n=2^{n+1}-2$

◇ 文系学部

1 理系学部 **2** と同じ．

2 （1） $k=2\sqrt{2},\ m=4$

（2） $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

3 （1） $\triangle\mathrm{AQR}=\cos\theta\sin\theta$

（2） $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$