◀2014 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　実数 a, b, c, d, e に対して，座標平面上の点 $\mathrm{A}(a, b)$，$\mathrm{B}(c, d)$，$\mathrm{C}(e, 0)$ をとる．ただし点 A と点 B はどちらも原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ とは異なる点とする．このとき，実数 s, t で

$$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

を満たすものが存在するための，a, b, c, d, e についての必要十分条件を求めよ．

2　$t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件 (ア)(イ) を満たす．

(ア)　$t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)\geqq 1+x$$

が成り立つ．

(イ)　$t>0$ に対して，等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$$

を満たす実数 x が存在する．

このとき，$f(t)$ を求めよ．

3　$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ．

4　半径 1 の 2 つの球 S_1 と S_2 が 1 点で接している．互いに重なる部分のない等しい半径を持つ n 個 $(n\geqq 3)$ の球 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ があり，次の条件 (ア)(イ) を満たす．

(ア)　T_i は S_1, S_2 にそれぞれ 1 点で接している $(i=1, 2, \cdots, n)$．

(イ)　T_i は T_{i+1} に 1 点で接しており $(i=1, 2, \cdots, n-1)$，そして T_n は T_1 に 1 点で接している．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$T_1, T_2, \cdots, T_n$ の共通の半径 r_n を求めよ．

(2)　S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，$T_1, T_2, \cdots, T_n$ の体積の和を W_n とするとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$$

を求めよ．

5　さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする．n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を T_n で表す．T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2, 3, 4 のいずれかである確率を q_n とする．

(1)　p_n+q_n を求めよ．

(2)　p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ．

(3)　$r_n=\left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ．

♠ 文系学部

1　i は虚数単位とし，実数 a, b は $a^2+b^2>0$ を満たす定数とする．複素数 $(a+bi)(x+yi)$ の実部が 2 に等しいような座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を L_1 とし，また $(a+bi)(x+yi)$ の虚部が -3 に等しいような座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を L_2 とする．

(1)　L_1 と L_2 はともに直線であることを示せ．

(2)　L_1 と L_2 は互いに垂直であることを示せ．

(3)　L_1 と L_2 の交点を求めよ．

2　次の問いに答えよ．

(1)　$\cos x+\cos y \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y に対して等式

$$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}$$

が成り立つことを証明せよ．

(2)　$\cos x+\cos y+\cos z \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y, z に対して等式

$$\tan\frac{x+y+z}{3}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\cos x+\cos y+\cos z}$$

は成り立つか．成り立つときは証明し，成り立たないときは反例を挙げよ．

3　関数 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ は，$x=0$ のとき極大値 M をとり，$x=\alpha$ のとき極小値 m をとるという．ただし $\alpha \neq 0$ とする．このとき，p, q, r, s を α, M, m で表せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　|標準|　$\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）
- **2**　|標準|　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用
- **3**　|標準|　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用
- **4**　|やや難|　$\boxed{\text{III}}$ 極限・積分法の応用
- **5**　|標準|　$\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{B}}$ 数列

♣ 文系学部

- **1**　|基本|　$\boxed{\text{II}}$ 複素数・図形と方程式
- **2**　|標準|　$\boxed{\text{II}}$ 三角関数
- **3**　|標準|　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分

略解

◇ 理系学部

1　$ad - bc \fallingdotseq 0$ または $e = 0$ または $b = d = 0$

2　$f(t) = 1 + \log \dfrac{1 + \sqrt{t^2 + 1}}{t} - \sqrt{t^2 + 1}$

3　398

4　(1)　$r_n = 2\tan^2 \dfrac{\pi}{n}$

　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{W_n}{V_n} = \dfrac{2}{3}$

5　(1)　$p_n + q_n = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

　(2)　$p_{n+1} = \dfrac{1}{6}p_n + \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

　(3)　$p_n = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

◇ 文系学部

1　(1)　証明は省略

　(2)　証明は省略

　(3)　$\left(\dfrac{2a - 3b}{a^2 + b^2},\ \dfrac{-3a - 2b}{a^2 + b^2}\right)$

2　(1)　証明は省略

　(2)　成り立たない．反例：$(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ \pi)$

3　$p = \dfrac{2(M - m)}{\alpha^3}$，　$q = -\dfrac{3(M - m)}{\alpha^2}$，　$r = 0$，　$s = M$