# ◀2013 年　大阪大学（前期）▶

## ♠ 理系学部

**1**　三角関数の極限に関する公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

を示すことにより，$\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ．

**2**　不等式

$$1\leqq \big||x|-2\big|+\big||y|-2\big|\leqq 3$$

の表す領域を $xy$ 平面上に図示せよ．

**3**　4 個の整数

$$n+1,\quad n^3+3,\quad n^5+5,\quad n^7+7$$

がすべて素数となるような正の整数 $n$ は存在しない．これを証明せよ．

**4**　$xyz$ 空間内の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を $x$ 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを $V$ とする．円すい $V$ を $y$ 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

**5**　$n$ を 3 以上の整数とする．$n$ 個の球 $K_1,\ K_2,\ \cdots\cdots,\ K_n$ と $n$ 個の空(から)の箱 $H_1,\ H_2,\ \cdots\cdots,\ H_n$ がある．以下のように，$K_1,\ K_2,\ \cdots\cdots,\ K_n$ の順番に，球を箱に 1 つずつ入れていく．

　まず，球 $K_1$ を箱 $H_1,\ H_2,\ \cdots\cdots,\ H_n$ のどれか 1 つに無作為に入れる．次に，球 $K_2$ を，箱 $H_2$ が空ならば箱 $H_2$ に入れ，箱 $H_2$ が空でなければ残りの $n-1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる．

　一般に，$i=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ について，球 $K_i$ を，箱 $H_i$ が空ならば箱 $H_i$ に入れ，箱 $H_i$ が空でなければ残りの $n-i+1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる．

(1)　$K_n$ が入(はい)る箱は $H_1$ または $H_n$ である．これを証明せよ．

(2)　$K_{n-1}$ が $H_{n-1}$ に入る確率を求めよ．

## ♠ 文系学部

**1**　$xy$ 平面において，点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

である．これを証明せよ．

**2**　1 個のさいころを 3 回投げる試行において，1 回目に出る目を $a$，2 回目に出る目を $b$，3 回目に出る目を $c$ とする．

(1)　$\log_{\frac{1}{4}}(a+b)>\log_{\frac{1}{2}}c$ となる確率を求めよ．

(2)　$2^a+2^b+2^c$ が 3 の倍数となる確率を求めよ．

**3**　曲線 $y = x^2 + x + 4 - |3x|$ と直線 $y = mx + 4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 $m$ の値を定めよ．

## 出題範囲と難易度

### ♣ 理系学部

**1** |基本| III 関数の極限・微分法

**2** |標準| II 図形と方程式

**3** |標準| A 整数問題

**4** |やや難| III 積分法の応用

**5** |難| A 確率

### ♣ 文系学部

**1** |標準| II 図形と方程式

**2** |標準| A 整数問題・ II 指数関数・対数関数

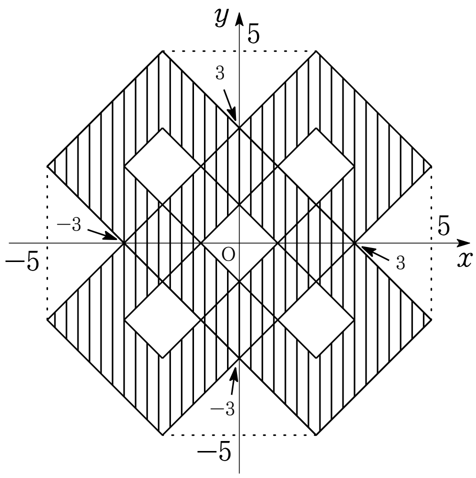
**3** |標準| II 微分積分

# 略解

## ◇ 理系学部

**1**　　証明は省略

**2**　　右図斜線部分で，境界線上の点は含む.




**3**　　証明は省略

**4**　　$\dfrac{8}{3}\pi$

**5**　(1)　証明は省略

　(2)　$\dfrac{2}{3}$

## ◇ 文系学部

**1**　　証明は省略

**2**　(1)　$\dfrac{137}{216}$

　(2)　$\dfrac{1}{4}$

**3**　　$m = 1$